

दूरीक और २-दूरीक समष्टियों
में
संपाती एवं स्थिर बिंदु प्रमेय

हेमवती नंदन बहुगुणा गढ़वाल विश्वविद्यालय

की

डी० फिल्० (गणित) उपाधि

हेतु

प्रस्तुत

शोध प्रबंध

प्रस्तुत कर्ता

विजयेन्द्र कुमार

पं० ललित मोहन शर्मा राजकीय स्नातकोत्तर महाविद्यालय
ऋषिकेश 249 201

शोध निर्देशक

प्रोफेसर श्याम लाल सिंह

नामांकन संख्या-जी०आर०-88006

अक्टूबर 1990

183571

85 A-52 3-4

संस्कृत-संस्कृत-संस्कृत

संस्कृत-संस्कृत-संस्कृत

संस्कृत-संस्कृत-संस्कृत

संस्कृत-संस्कृत-संस्कृत

संस्कृत-संस्कृत-संस्कृत

संस्कृत-संस्कृत-संस्कृत

संस्कृत-संस्कृत-संस्कृत

Donated by :
Family of Late Prof. S.L. Singh
Ex. Principal, College of Science
G.K.V. Haridwar

दूरीक और २-दूरीक समष्टियों में

संपाती एवं स्थिर बिंदु प्रमेय

हेमवती नंदन बहुगुणा गढ़वाल विश्वविद्यालय

की

डी० फिल्० (गणित) उपाधि

हेतु

प्रस्तुत

शोध प्रबंध



प्रस्तुत कर्ता

विजयेन्द्र कुमार

पं० ललित मोहन शर्मा राजकीय स्नातकोत्तर महाविद्यालय
ऋषिकेश 249 201

शोध निर्देशक

प्रोफेसर श्याम बाबू सिंह

नामांकन संख्या-जो०आर०-88006

अक्टूबर 1990

Donated by :
Family of Late Prof. S.L. Singh
Ex. Principal, College of Science
G.K.V. Haridwar

दूरीक और २-दूरीक समष्टियों में

संपाती एवं स्थिर बिंदु प्रमेय

हेमवती नंदन बहुगुणा गढ़वाल विश्वविद्यालय

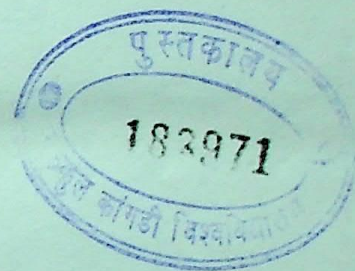
की

डी० फिल्० (गणित) उपाधि

हेतु

प्रस्तुत

शोध प्रबंध



प्रस्तुत कर्ता

विजयेन्द्र कुमार

पं० ललित मोहन शर्मा राजकीय स्नातकोत्तर महाविद्यालय
ऋषिकेश 249 201

शोध निर्देशक

प्रोफेसर श्याम लाल सिंह

नामांकन संख्या-जो०आर०-88006

अक्टूबर 1990

पिंडीस कटिह-२ रीठ कटिह

ॐ

परिह हुंरी राप्ती हंगु तिपसं

पञ्चाङ्गसिद्धि कालिका पञ्चाङ्ग सन्त तिपसं

ॐ

पिंडी (कालिका) पञ्चाङ्ग ००१

ॐ

पञ्चाङ्ग

ॐ

पञ्चाङ्ग

ॐ

पञ्चाङ्ग

पञ्चाङ्गसिद्धि कालिका पञ्चाङ्ग सन्त तिपसं ००१
ॐ

ॐ

पञ्चाङ्ग

ॐ

ॐ

1954-1955

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

Figure 1

1948

२००८८-०१०८-०१०८-०१०८

संस्कृत-भाषा-विभाग

संस्कृत-भाषा-विभाग
संस्कृत-भाषा-विभाग
संस्कृत-भाषा-विभाग

संस्कृत-भाषा-विभाग

संस्कृत-भाषा-विभाग

संस्कृत-भाषा-विभाग

संस्कृत-भाषा-विभाग
संस्कृत-भाषा-विभाग

संस्कृत-भाषा-विभाग

संस्कृत-भाषा-विभाग

संस्कृत-भाषा-विभाग

संस्कृत-भाषा-विभाग



प्रमाण पत्र

मैं प्रमाणित करता हूँ कि मैने 'द्वरीक और 2-द्वरीक समष्टि' में संपाती एवं स्थिर बिंदु प्रमेय' शीर्षक शोध प्रबंध प्रोफेसर श्याम लाल सिंह के निर्देशन में तैयार किया है. विश्वविद्यालय नियमों के अंतर्गत यह शोध प्रबंध किसी अन्य संपादक के लिए प्रयुक्त नहीं हुआ है.

दिनांक अक्टूबर 22, 1990

वि. कुमार
विजयेन्द्र कुमार
अनुसंधान

जहाँ तक मुझे जानकारी है अनुसंधान विश्वविद्यालय के शोध संबंधी सभी नियमों एवं उपनियमों का अनुपालन करता है. परीक्षार्थ संस्तुत एवं अप्रस्तुत.

दिनांक अक्टूबर 22, 1990

श्याम लाल सिंह
डॉ. श्याम लाल सिंह
2/2, गोविंद नगर
अधिकेश 249 201

1. The first part of the paper is devoted to a general discussion of the problem of the existence of solutions of the system of equations (1) for arbitrary values of the parameters α and β . It is shown that the system has solutions for arbitrary values of the parameters α and β if and only if the condition $\alpha + \beta = 1$ is satisfied. In this case the solutions are unique and are given by the formulas

1944

Doc. 798-106

1. 1954 年 10 月 1 日以前，
 2. 1954 年 10 月 1 日以后，

THE
MUSEUM OF THE
CITY OF BOSTON

0001, २ अङ्गुली त्रिंशत्

प्रमाण पत्र

मैं प्रमाणित करता हूँ कि मैंने 'दूरीक और 2-दूरीक समष्टियों में संपाती एवं स्थिर बिंदु प्रमेय' शीर्षक शोध प्रबंध प्रोफेसर श्याम लाल सिंह के निर्देशन में तैयार किया है. विश्वविद्यालय नियमों के अंतर्गत यह शोध प्रबंध किसी अन्य उपाधि के लिए प्रयुक्त नहीं हुआ है.

दिनांक अक्टूबर 22, 1990

वि. कुमार
विजयेन्द्र कुमार
अनुसंधित्सु

जहाँ तक मुझे जानकारी है अनुसंधित्सु विश्वविद्यालय के शोध संबंधी सभी नियमों एवं उपनियमों का अनुपालन करता है. परीक्षणार्थ संस्तुत एवं अप्रसारित.

दिनांक अक्टूबर 22, 1990

श्याम लाल सिंह
डॉ श्याम लाल सिंह
2/2, गोविंद नगर
ऋषिकेश 249 201

ॐ नमो भगवते वासुदेवाय ॥ श्री कृष्णाय नमः ॥
ॐ नमो भगवते वासुदेवाय ॥ श्री कृष्णाय नमः ॥
ॐ नमो भगवते वासुदेवाय ॥ श्री कृष्णाय नमः ॥

महाराज
श्री कृष्ण
नमः

ॐ नमो भगवते वासुदेवाय ॥

ॐ नमो भगवते वासुदेवाय ॥ श्री कृष्णाय नमः ॥
ॐ नमो भगवते वासुदेवाय ॥ श्री कृष्णाय नमः ॥

महाराज
श्री कृष्ण
नमः

ॐ नमो भगवते वासुदेवाय ॥

प्रोफेसर श्री श्याम लाल सिंह जी से, उनके निर्देशन में शोध कार्य करने की अपनी प्रार्थना के उत्तर में उनका हिंदी माध्यम से शोध कार्य करने का प्रस्ताव सुनकर मैं चकित रह गया था, मेरी प्रथम प्रतिक्रिया यह थी कि क्या यह सर्वथा संभव हो सकता है, लेकिन जब उन्होंने भारत सरकार द्वारा प्रकाशित वैज्ञानिक तथा तकनीकी शब्दावली तथा मानक हिंदी वर्तनी आदि का परिचय देकर हर संभव सहायता और मार्गदर्शन देने का आश्वासन दिया तो मुझे भी मातृभाषा की सेवा करने का गौरवपूर्ण बोध हुआ, अस्तु हिंदी माध्यम से ही गणित में शोध कार्य करने का निश्चय किया गया, जहाँ तक मुझे ज्ञात है गणित विषय में हिंदी माध्यम से शोध कार्य करने का यह प्रथम प्रयास था, शिव संकल्प के धनी प्रोफेसर श्याम लाल सिंह जी की सहायता से हिंदी भाषा और देवनागरी लिपि में शोध प्रारूप तैयार हुआ तथा (हेमवती नंदन बहुगुणा) गढ़वाल विश्वविद्यालय, श्रीनगर की डी० फिल० (गणित) उपाधि हेतु अक्टूबर 1986 में प्रेषित किया गया।

इस कार्य के सम्पन्न में कठिनाइयों तो आईं पर असीम करुणाकर परमेश्वर ने मेरी असीम सहायता की, यह अनुभव वर्णनीय है, तकनीकी शब्दावली में भी कुछ शब्दों के हिंदी तुल्य रूप वहीं दिए हुए थे, प्रोफेसर सिंह जी ने उन शब्दों के हिंदी तुल्य रूप स्वयं सुझाए तथा मानक वर्तनी के आधार पर एकसूत्रता की रक्षा के लिए वर्तनी के उपयोग की प्रेरणा दी।

अन्य कठिनाइयों के कारण जब भी कभी मैं अशक्त होता सभी मेरे सहृदय शोध निवेष्टक (प्रोफेसर श्री श्याम लाल सिंह जी) तुरंत सहायता करते थे, समस्याओं के स्वरित निराकरण करने एवं उपयोगी सुझाव देने के कारण ही निश्चित अविधि के यह गुरुत्तर कार्य सम्पन्न हो सका, उनके दीर्घकालीन शोध अनुभवों और वैदुष्य का मैंने पूर्ण लाभ उठाया है, मैं गुरुवर डी० श्याम लाल सिंह जी का धिर कृतज्ञ हूँ।

मित्रों के साथ-साथ मैं भी अपनी सेवा के लिए अपने काम में जुट गई।
मैंने भी अपना योगदान देने के लिए बहुत कुछ किया। मैंने अपने
समस्त धन को दान में दे दिया। मैंने अपने घर को भी दान में दे दिया।
मैंने अपने परिवार को भी दान में दे दिया। मैंने अपने देश को भी दान में दे दिया।
मैंने अपने विश्व को भी दान में दे दिया। मैंने अपने मानव को भी दान में दे दिया।
मैंने अपने प्रकृति को भी दान में दे दिया। मैंने अपने अन्तरिक्ष को भी दान में दे दिया।
मैंने अपने भविष्य को भी दान में दे दिया। मैंने अपने अतीत को भी दान में दे दिया।
मैंने अपने वर्तमान को भी दान में दे दिया। मैंने अपने सारे को भी दान में दे दिया।

मैंने अपने सारे को दान में दे दिया। मैंने अपने सारे को दान में दे दिया।
मैंने अपने सारे को दान में दे दिया। मैंने अपने सारे को दान में दे दिया।
मैंने अपने सारे को दान में दे दिया। मैंने अपने सारे को दान में दे दिया।
मैंने अपने सारे को दान में दे दिया। मैंने अपने सारे को दान में दे दिया।
मैंने अपने सारे को दान में दे दिया। मैंने अपने सारे को दान में दे दिया।
मैंने अपने सारे को दान में दे दिया। मैंने अपने सारे को दान में दे दिया।
मैंने अपने सारे को दान में दे दिया। मैंने अपने सारे को दान में दे दिया।
मैंने अपने सारे को दान में दे दिया। मैंने अपने सारे को दान में दे दिया।
मैंने अपने सारे को दान में दे दिया। मैंने अपने सारे को दान में दे दिया।
मैंने अपने सारे को दान में दे दिया। मैंने अपने सारे को दान में दे दिया।

इस शोध प्रबंध में केंद्रीय हिंदी निदेशालय द्वारा स्वीकृत वर्तनी का उपयोग किया गया है. अतः प्रचलित वर्तनी के अभ्यासी विद्वानों को कुछ अटपटा सा लग सकता है पर आशा है कि सहृदय विद्वान वर्तनी की एकरूपता की रक्षा के लिए उठाए गए इस कदम का स्वागत करेंगे. परिवर्तित वर्तनी के कुछ रूप इस प्रकार हैं.

पूर्व प्रचलित रूप	नव मान्य रूप
द्वितीय	द्वितीय
प्रारम्भिकी	प्रारंभिकी
यद्यपि	यद्यपि
विश्वविद्यालय	विश्वविद्यालय
सिद्धान्त	सिद्धान्त

यद्यपि पूर्ण विराम चिह्न (।) को यथा स्थान प्रयुक्त करने का सुझाव दिया गया है परंतु प्रस्तुत शोध प्रबंध में यह चिह्न प्रयोग करने पर भ्रम उत्पन्न होने की संभावना थी. अतः विराम चिह्न के स्थान पर चिह्न (.) का प्रयोग किया गया है.

प्रस्तुत शोध प्रबंध छह अध्यायों में विभाजित है. प्रथम अध्याय परिचयात्मक है. शेष पांच अध्यायों में विभिन्न प्रतिचित्रण शर्तों के अधीन स्थिर बिंदु प्रमेय सिद्ध किए गए हैं. इनका संक्षिप्त विवरण प्रथम अध्याय के अंत में दिया गया है.

प्रस्तुत कार्य के प्रारंभ से अंत तक जिन लोगों से मुझे सहयोग प्राप्त हुआ है उन सबके प्रति मैं आभारी हूँ. इनमें से कुछ प्रमुख महानुभाव हैं -

इसी प्रकार कि जिस प्रकार हम सब जानते हैं कि हम सब
 हैं इसी प्रकार कि हम सब जानते हैं कि हम सब
 हैं इसी प्रकार कि हम सब जानते हैं कि हम सब
 हैं इसी प्रकार कि हम सब जानते हैं कि हम सब

हम सब जानते हैं

हम सब जानते हैं

हम सब जानते हैं

हम सब जानते हैं

हम सब जानते हैं

हम सब जानते हैं

हम सब जानते हैं

हम सब जानते हैं

हम सब जानते हैं

हम सब जानते हैं

हम सब जानते हैं

इसी प्रकार कि हम सब जानते हैं कि हम सब
 हैं इसी प्रकार कि हम सब जानते हैं कि हम सब
 हैं इसी प्रकार कि हम सब जानते हैं कि हम सब

हम सब जानते हैं

हम सब जानते हैं

हम सब जानते हैं

हम सब जानते हैं

हम सब जानते हैं

प्रोफेसर पी०एस० थपलियाल (अध्यक्ष, गणित विभाग, हेमवती नंदन बहुगुणा
गढ़वाल विश्वविद्यालय, श्रीनगर), डॉ० शिव गोपाल मिश्र (विज्ञान परिषद्, इलाहाबाद),
प्रोफेसर विष्णु दत्त राकेश (अध्यक्ष, हिंदी विभाग, गुरुकुल कांगड़ी विश्वविद्यालय,
हरिद्वार) व डॉ० गोपाल कृष्ण सिन्हा (प्राचार्य, पं० ललित मोहन शर्मा राजकीय
स्नातकोत्तर महाविद्यालय, ऋषिकेश).

टंकक श्री आशुतोष कुमार इस शोध प्रबंध के कुशल टंकण हेतु मेरे हार्दिक
धन्यवाद के पात्र हैं.

ऋषिकेश

अक्टूबर 22, 1990

वि. कुमार

विजयेन्द्र कुमार

पं० ललित मोहन शर्मा राजकीय स्नातकोत्तर महाविद्यालय

, ऋषिकेश 249 201

१०००० (१००००) १०००० (१००००) १०००० (१००००) १०००० (१००००)
 १०००० (१००००) १०००० (१००००) १०००० (१००००) १०००० (१००००)
 १०००० (१००००) १०००० (१००००) १०००० (१००००) १०००० (१००००)
 १०००० (१००००) १०००० (१००००) १०००० (१००००) १०००० (१००००)
 १०००० (१००००) १०००० (१००००) १०००० (१००००) १०००० (१००००)

१०००० (१००००) १०००० (१००००) १०००० (१००००) १०००० (१००००)
 १०००० (१००००) १०००० (१००००) १०००० (१००००) १०००० (१००००)

१०००० (१००००)

१०००० (१००००)

१०००० (१००००) १०००० (१००००) १०००० (१००००) १०००० (१००००)

१०००० (१००००)

१०००० (१००००)

१०००० (१००००)

अनुक्रमसूचिका

	पृष्ठ संख्या
प्रथम अध्याय	1
भूमिका	
2-दूरीक समष्टि	2
वानाख संकुचन सिद्धांत एवं इसके कुछ व्यापकीकरण	6
युक्त संकुचन सिद्धांत	10
आगामी अध्यायों की संक्षिप्त रूपरेखा	13
द्वितीय अध्याय	15
2-दूरीक समष्टि पर प्रतिचित्रण समूह के संपात तथा स्थिर बिंदु	
प्रारंभिकी	16
परिणाम	18 ✓
टिप्पणियाँ	40
अनुप्रयोग	44
हसियाओं के निष्कर्ष पर टिप्पणी	48
तृतीय अध्याय	52
उपगामी क्रमविनिययी प्रतिचित्रणों हेतु 2-दूरीक	
समष्टि में स्थिर बिंदु प्रमेय	
प्रारंभिकी	53
तीन प्रतिचित्रणों हेतु स्थिर बिंदु प्रमेय	55
चार प्रतिचित्रणों हेतु स्थिर बिंदु प्रमेय	56

सं. १११-१५०

सं. १११-१५०

सं. १११-१५०

सं. १११-१५०

सं. १११-१५०

सं. १११-१५०

सं. १११-१५०

सं. १११-१५०

सं. १११-१५०

सं. १११-१५०

सं. १११-१५०

सं. १११-१५०

सं. १११-१५०

सं. १११-१५०

सं. १११-१५०

सं. १११-१५०

सं. १११-१५०

सं. १११-१५०

सं. १११-१५०

सं. १११-१५०

सं. १११-१५०

सं. १११-१५०

	पृष्ठ संख्या
✓ चतुर्थ अध्याय	78
संकुचनीय पुनरावृत्तिक धारी प्रतिचित्रणों के स्थिर बिंदु	
प्रारंभिकी	79
स्थिर बिंदु प्रमेय	80
* पंचम अध्याय	95
प्रतिचित्रणों के अनुक्रम का अभिसरण एवं	
सम परिवेश समष्टि में स्थिर बिंदु प्रमेय	
प्रारंभिकी	96
सांस्थितिक प्रारंभिकी	97
परिणाम	98
टिप्पणियाँ	114
✓ षष्ठ अध्याय	115
2-दूरीक समष्टि में प्रतिचित्रणों के अनुक्रम का	
अभिसरण एवं उनके उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु	
प्रारंभिकी	116
परिणाम	117
टिप्पणियाँ	124
निर्देश	125
तकनीकी शब्द (TECHNICAL TERMS)	143
प्रकाशन	151

पृष्ठ संख्या

पृष्ठ संख्या

86

युद्ध काल के विप्लवों के लिए आवश्यक सामान्य

87

विप्लव

88

युद्ध काल के लिए

89

पृष्ठ संख्या

युद्ध काल के लिए आवश्यक सामान्य

युद्ध काल के लिए आवश्यक सामान्य

90

विप्लव

91

विप्लव काल के लिए

92

युद्ध

93

विप्लव

94

पृष्ठ संख्या

युद्ध काल के लिए आवश्यक सामान्य

युद्ध काल के लिए आवश्यक सामान्य

95

विप्लव

96

युद्ध

97

विप्लव

98

पृष्ठ संख्या

99

युद्ध काल के लिए आवश्यक सामान्य

100

पृष्ठ संख्या

प्रथम अध्याय

भूमिका

इस परिचयात्मक अध्याय में, सर्वप्रथम, जर्मन गणितज्ञ गहलर द्वारा अन्वेषित 2-दूरीक समष्टि एवं इससे संबंधित कुछ विवरण प्रस्तुत किये जायेंगे. दूसरे व तीसरे अनुभागों में बानाख एवं युंक संकुचन सिद्धांतों एवं इनके कुछ प्रमुख व्यापकीकरणों का एक विवरण अनुस्यूत है. अंतिम अनुभाग शेष अध्यायों के प्रमुख कार्यों का संकेत प्रदान करता है. इस अध्याय के निम्न चार अनुभाग हैं :

1. 2-दूरीक समष्टि
2. बानाख संकुचन सिद्धांत एवं इसके कुछ व्यापकीकरण
3. युंक संकुचन सिद्धांत
4. आगामी अध्यायों की संक्षिप्त रूपरेखा

1. 2-दूरीक समष्टि

प्रोफेसर एस० गहलर [26] - [29] ने 2-दूरीक समष्टि की अवधारणा का अन्वेषण किया है (देखें [9], [21], [22], [38], [43], [59], [65], [86], [87], [95] और [145] भी).

यूक्लिड समष्टि में तीन बिंदुओं द्वारा निर्धारित त्रिभुज के क्षेत्रफल से उत्प्रेरित होकर एक (अरिक्त) समुच्चय पर 2-दूरीक के गुण धर्म सुझाए गये हैं.

एक अरिक्त समुच्चय X के लिए $X \times X \times X$ पर वास्तविक मानीय फलन d को 2-दूरीक कहते हैं, यदि निम्न शर्तें संतुष्ट हों -

(द - 1) दो भिन्न बिंदुओं x, y के लिए तीसरा बिंदु z इस प्रकार हो कि

$$d(x, y, z) \neq 0;$$

(द - 2) यदि तीन बिंदुओं x, y, z में से कम से कम दो समान हों तो

$$d(x, y, z) = 0;$$

(द - 3) $d(x, y, z) = d(y, z, x) = d(z, x, y)$

(तीन चरों में सममिति);

(द - 4) $d(x, y, z) \leq d(x, y, u) + d(x, u, z) + d(u, y, z)$
(त्रिभुजीय असमिका).

युग्म (X, d) को 2-दूरीक समष्टि कहा जाता है. यह स्पष्ट है कि दूरीफलन ऋणोत्तर संख्या है.

उदाहरण 1 [26]. यदि x_j, y_j, z_j क्रमशः x, y और z के निर्देशांक हों तो दो और अधिक विमाओं के प्रत्येक यूक्लिडीयन दूरीक पर निम्न 2-दूरीक पारिभाषित होती है:

$$d(x, y, z) = \frac{1}{2} \left[\sum_{i < j} \begin{vmatrix} x_i & x_j & 1 \\ y_i & y_j & 1 \\ z_i & z_j & 1 \end{vmatrix}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

इस प्रकार पारिभाषित दूरीक यूक्लिडीयन 2-दूरीक कहा जाता है. (देखें [9] व [26]).

इस अध्याय में, जब तक अन्यथा न कहा जाय, 2-दूरीक समष्टि के लिए (X, d) तथा दूरीक समष्टि (1-दूरीक समष्टि) के लिए (M, d) का प्रयोग करेंगे.

गहलर [26] ने सिद्ध किया है कि यद्यपि 2-दूरीक d तीनों स्थानों (अर्थात् तीनों निर्देशांकों) में से किसी एक का संतत फलन है किन्तु आवश्यक नहीं यह दो स्थानों में भी संतत हो. यदि यह दो स्थानों में संतत है तब यह तीनों स्थानों में संतत होगा. 2-दूरीक फलन द्विसंतत फलन कहा जायगा यदि यह सभी स्थानों में संतत हो.

2-दूरीक समष्टि X का एक अनुक्रम $\{x_n\}$ कौशी अनुक्रम कहा जाता है यदि X के प्रत्येक बिंदु a के लिए

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, a) = 0.$$

समष्टि X के बिंदु x पर अनुक्रम $\{x_n\}$ अभिसार करता है तथा x को इस अनुक्रम की सीमा कहा जाता है यदि X के प्रत्येक a के लिए

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x, a) = 0.$$

एक 2-दूरीक समष्टि जिसका प्रत्येक कौशी अनुक्रम उसी में अभिसार करता हो, पूर्ण 2-दूरीक समष्टि कहा जाता है.

किसी पूर्ण 2-दूरीक समष्टि में अभिसार करने वाले प्रत्येक अनुक्रम का कौशी अनुक्रम होना आवश्यक नहीं है. इस तथ्य के पक्ष में नायडू एवं प्रसाद [71] का निम्न उदाहरण दर्शनीय है.

उदाहरण 2 [71]. मान लें

$$X = \{ 0, 1, 1/2, 1/3, \dots \}$$

तथा दूरीक $d: X \times X \times X \rightarrow [0, \infty)$ को निम्न प्रकार परिभाषित करें -

$$d(x, y, z)$$

इस प्रकार हमें (n, x) समुच्चय का x उपसमूह कहेंगे-

जहाँ n x के गुणित के x की है

$$0 = (0, x, \dots, x) \text{ जहाँ}$$

जहाँ x n के गुणित के x की है (n, x) समुच्चय का x उपसमूह

जहाँ n x के गुणित के x की है जहाँ n x के गुणित के x की है

$$0 = (0, x, \dots, x) \text{ जहाँ}$$

इस प्रकार हमें (n, x) समुच्चय का x उपसमूह कहेंगे-

जहाँ n x के गुणित के x की है

इस प्रकार हमें (n, x) समुच्चय का x उपसमूह कहेंगे-

जहाँ n x के गुणित के x की है (n, x) समुच्चय का x उपसमूह

जहाँ n x के गुणित के x की है

$$x = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

इस प्रकार हमें (n, x) समुच्चय का x उपसमूह कहेंगे-

$$(n, x)$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{यदि } x, y, z \text{ भिन्न हैं तथा किसी धन पूर्णांक } n \text{ के लिए} \\ & \left\{ \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1} \right\} \text{ समुच्चय } \{x, y, z\} \text{ में अन्तर्विष्ट} \\ & \text{है,} \\ 0 & \text{अन्यथा.} \end{cases}$$

यहाँ (X, d) एक पूर्ण 2-दूरीक समष्टि है तथा अनुक्रम $\{\frac{1}{n}\}$ शून्य पर अभिसार करता है परन्तु $\{\frac{1}{n}\}$ कौशी अनुक्रम नहीं है.

यदि 2-दूरीक d समुच्चय X पर संतत हो तो समष्टि X में अभिसार करने वाला प्रत्येक अनुक्रम कौशी होता है परन्तु इसका विलोम सत्य नहीं है. इस तथ्य को उद्घाटित करते हुए इसके पक्ष में नायडू एवं प्रसाद [71] ने एक उदाहरण (उदाहरण 3 देखें) दिया है.

उदाहरण 3 [71] . मान लें

$$X = \{a\} \cup \{a_n \mid n = 1, 2, \dots\} \cup \{b\} \cup \{b_n \mid n = 1, 2, \dots\}$$

जहाँ $a = (1, 0), b = (0, 0), a_n = (1 + 1/n, 0)$

तथा $b_n = (0, 1/n) \quad (n = 1, 2, \dots)$

दूरीक $d : X \times X \times X \rightarrow [0, \infty)$

निम्न प्रकार लें $d(x, y, z)$

$$= \begin{cases} 1 & \text{यदि किसी धन पूर्णांक } n \text{ के लिए} \\ & \{x, y, z\} = \{a_n, b_n, a\} \text{ या } \{a_n, b_n, b\} \\ & \text{अथवा विभिन्न धन पूर्णांको } m, n \text{ के लिए} \\ & \{x, y, z\} = \{a_n, b_n, a_m\} \text{ या } \{a_n, b_n, b_m\} \\ \Delta xyz & \text{अन्यथा,} \end{cases}$$

जहाँ Δxyz बिंदुओं x, y और z से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल है.

2. बानाख संकुचन सिद्धांत एवं इसके कुछ व्यापकीकरण

यदि दूरीक समष्टि (M, d) पर एक प्रतिचित्रण T के लिए एक ऋणेतर नियतांक $k < 1$ का इस प्रकार अस्तित्व हो कि M के प्रत्येक बिंदु x, y के लिए

$$(ब - 1) \quad d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

तो T को समष्टि M पर संकुचन प्रतिचित्रण कहा जाता है.

जैसा कि सुजात है, सन् 1922 में स्टीफन बानाख ने यह सिद्ध किया कि पूर्ण दूरीक $(1 - \text{दूरीक})$ समष्टि पर संकुचन प्रतिचित्रण एक अद्वितीय स्थिर बिंदु रखता

$(x, y, z) = (a, b, c)$ \Rightarrow $(x, y, z) = (a, b, c)$
 $(x, y, z) = (a, b, c)$ \Rightarrow $(x, y, z) = (a, b, c)$
 $(x, y, z) = (a, b, c)$ \Rightarrow $(x, y, z) = (a, b, c)$

$(x, y, z) = (a, b, c)$ \Rightarrow $(x, y, z) = (a, b, c)$

$(x, y, z) = (a, b, c)$ \Rightarrow $(x, y, z) = (a, b, c)$

$(x, y, z) = (a, b, c)$ \Rightarrow $(x, y, z) = (a, b, c)$

$(x, y, z) = (a, b, c)$ \Rightarrow $(x, y, z) = (a, b, c)$

$(x, y, z) = (a, b, c)$ \Rightarrow $(x, y, z) = (a, b, c)$

$(x, y, z) = (a, b, c)$ \Rightarrow $(x, y, z) = (a, b, c)$

$(x, y, z) = (a, b, c)$ \Rightarrow $(x, y, z) = (a, b, c)$

है, अर्थात् समष्टि M में एक ऐसे अद्वितीय बिंदु z का अस्तित्व होता है कि $Tz = z$. यह सिद्धांत बानाख संकुचन सिद्धांत (बासर्स) नाम से लोकप्रिय है.

इस लोकप्रिय प्रमेय के विभिन्न गणितीय विधाओं में उल्लेखनीय अनुप्रयोग होने के कारण इस प्रमेय के विभिन्न व्यापकीकरण, विस्तारण एवं, उन्नयन होते रहे हैं और अब भी हो रहे हैं (उदाहरणार्थ देखें [1] - [20], [23], [25], [30] - [37], [39] - [42], [44] - [54], [56] - [58], [60] - [144] एवं [146]).

ऐसा प्रतीत होता है कि कियोसी आईसेकी - बी०के०शर्मा-पी०एल०शर्मा ने 2-दूरीक समष्टि पर संकुचन प्रतिचित्रण पारिभाषित किया तथा उनके इस प्रारंभिक कार्य से 2-दूरीक एवं 2-मानकित समष्टियों पर प्रतिचित्रणों के स्थिर बिंदुओं के अस्तित्व का शुभारंभ हुआ. इन प्रारंभिक कार्यों के लिए देखें [41] - [43], [46] - [47] एवं [109]. किंतु इन गणितज्ञों ने 2-दूरीक समष्टि पर परिवद्धता के प्रतिबंध का प्रयोग करते हुए स्थिर बिंदु का अन्वेषण किया. ऐसा प्रतीत होता है कि समष्टि पर परिवद्धता के प्रतिबंध का प्रयोग किये बिना रोअड्स [95] तथा लाल एवं सिंह [62] ने 2-दूरीक समष्टि पर संकुचन प्रकार के प्रतिचित्रणों हेतु अद्वितीय (उभयनिष्ठ) स्थिर बिंदु के अस्तित्व का अध्ययन किया. वस्तुतः, किरिक [15] द्वारा प्रतिपादित बानाख संकुचन सिद्धांत के एक प्रमुख व्यापकीकरण का एक 2-दूरीक समष्टि पर रोअड्स [95] ने विस्तारण किया, जो निम्नवत् है:

प्रमेय 1 [95]. मान लें X एक पूर्ण 2-दूरीक समष्टि है. यदि $T : X \rightarrow X$ समष्टि X के प्रत्येक x, y, a के लिए प्रतिचित्रण शर्त

$$(1.1) \quad d(Tx, Ty, a)$$

$$\leq k \text{ अधिकतम } \{d(x, y, a), d(x, Tx, a),$$

$$d(y, Ty, a), d(x, Ty, a), d(y, Tx, a)\}$$

जहाँ $0 \leq k < 1$ को संतुष्ट करता हो तो T के अद्वितीय स्थिर बिंदु z का अस्तित्व प्राप्त होता है तथा X के प्रत्येक बिंदु x_0 के लिए $T^n x_0 = z$ होता है.

रोअड्स [95] ने दो प्रतिचित्रणों हेतु जो परिणाम (नीचे देखें प्रमेय 2) प्राप्त किया वह लाल एवं सिंह [62] के 2-दूरीक समष्टि पर दो प्रतिचित्रणों हेतु संगत परिणाम से उन्नत है.

प्रमेय 2 [95]. मान लें S, T पूर्ण 2-दूरीक समष्टि X पर X के समस्त x, y, a के लिए प्रतिचित्रण शर्त

$$(2.1) \quad d(Sx, Ty, a)$$

$$\leq k \text{ अधिकतम } \{d(x, y, a), d(x, Sx, a),$$

$$d(y, Ty, a), [d(x, Ty, a) + d(y, Sx, a)]/2\}$$

को $0 \leq k < 1$ के लिए संतुष्ट करते हुए स्व-प्रतिचित्रण हैं जहाँ k एक स्थिर नियतांक है तब S तथा T के एक अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु का इस प्रकार अस्तित्व होगा कि X के समस्त x_0 के लिए

$(a, xT, x)D, (b, y, x)D$ समजावे $x \geq$

$(a, xT, y)D, (a, yT, x)D, (a, yT, y)D$

असो x ही जशी परिभाषा के T में कि एक जगह $1 > x > 0$ कि
जहाँ $x = x^{-1}T$ की के x ही जगह के x एक है जहाँ जगह जगह

(2) जहाँ कि (3) समजावे कि एक परिभाषा के (2) प्रकार
जहाँ कि एक जगह कि एक जगह के (2) जहाँ कि एक जगह कि एक जगह
जहाँ कि एक जगह कि एक जगह के (2) जहाँ कि एक जगह कि एक जगह

असो x ही जगह जगह के T, a कि एक $(2) : 2$ प्रकार

जहाँ कि एक जगह x, y, a के कि एक जगह जगह

$(a, yT, x)D$ (1.2)

$(a, x)D, (a, y, x)D, (a, y, x)D$ समजावे $x \geq$

$(a, yT, x)D, (a, yT, x)D, (a, yT, x)D$

असो x ही जगह जगह के T में कि एक जगह $1 > x > 0$ कि
जहाँ कि एक जगह कि एक जगह के T में कि एक जगह कि एक जगह
जहाँ कि एक जगह कि एक जगह के T में कि एक जगह कि एक जगह

$$(ST)^n x_0 + z$$

और

$$(TS)^n x_0 + z.$$

उल्लेखनीय है कि यदि प्रमेय 2 में प्रतिचित्रण - प्रतिबंध (2.1) को (2.2) (नीचे देखें)[†] से प्रतिस्थापित करें तो प्रमेय 2 की सत्यता संदिग्ध हो जाती है. देखें नायडू एवं प्रसाद [71, उदाहरण 1.1.]. वस्तुतः, (2.1) के स्थान पर (2.2) लेने से प्रमेय 2 की सत्यता के लिए अतिरिक्त प्रतिबंध की आवश्यकता पड़ती है. इस तथ्य को कई अन्य गणितज्ञों ने भी रेखांकित किया है तथा संकुचनीय सिद्धांत के विकास विशेषकर 2-दूरीक समष्टि पर प्रतिचित्रणों के अन्वेषण एवं उक्त प्रमेयों के व्यपकीकरण में यह तथ्य अपनी एक विशेष भूमिका अदा कर रहा है. उदाहरणार्थ देखें चो-खान-सिंह[11] हैड्जिक [36], हुसैन-सहगल [39], युंक [52], कसाहारा [54], खान-इमदाद-स्वालेह [57], कूबियक [60], लाल - दास [61], मीडे-सिंह [64], मिजको-पालजेवस्की [65], नायडू-प्रसाद [69] - [71], पंत [79], पार्क [81], राम [86], रोअड्स [92], रोअड्स-सेसा-खान-स्वालेह [96] (इस प्रपत्र पर विशेष टिप्पणी हेतु नेल्सन-सिंह [74] को देखें), शास्त्री-नायडू-राव [97] - [99], सेसा-मुखर्जी-सोम [104], सेसा-रोअड्स-खान [105], शर्मा [107], सिंह [116], सिंह [118], सिंह-कसाहारा [122], सिंह-कुलश्रेष्ठा [125], सिंह-मिश्रा [127], सिंह-नारायण [128], सिंह-नोरिस [129], सिंह-पंत [130], सिंह-राम [132], सिंह-सिंह [134], तिवारी-सिंह [142] एवं वीरेन्द्र [143]-[144].

† $S = T =$ तटसमक प्रतिचित्रण के साथ शर्त (C.4) (पृष्ठ 39) को हम यहाँ शर्त (2.2) मान रहे हैं.

3. युंक संकुचन सिद्धांत

यदि दूरीक समष्टि (M, d) पर स्व-प्रतिचित्रणों T व f के लिए एक धनात्मक नियतांक $k < 1$ का अस्तित्व इस प्रकार हो कि

$$(ज - 1) \quad T M \subset f M ;$$

$$(ज - 2) \quad d(Tx, Ty) \leq kd(fx, fy), x, y \in M;$$

$$(ज - 3) \quad \text{प्रतिचित्रण } f \text{ संतत हो;}$$

$$(ज - 4) \quad \text{प्रतिचित्रण } T \text{ और } f \text{ क्रमविनिमयी हों;}$$

तब पूर्ण दूरीक समष्टि M में प्रतिचित्रण T एवं f एक अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु रखते हैं.

यह परिणाम युंक [49] ने 1976 में प्रकाशित किया.

{विशेष टिप्पणी. यद्यपि प्रतिबंधों (ज - 1)-(ज - 2) के अधीन दो प्रतिचित्रणों के संपात बिंदु का अध्ययन गोबेल [34] ने युंक का परिणाम प्रकाशित होने से 6-7 वर्ष पूर्व कर लिया था तथापि ऐसा प्रतीत होता है कि युंक के उक्त परिणाम का आधार गोबेल [34] का संपात प्रमेय नहीं है. वस्तुतः गोबेल ने बासिस का प्रयोग करते हुए यह सिद्ध किया है कि यदि पूर्ण दूरीक समष्टि पर स्व-प्रतिचित्रण (ज-1) व (ज-2) को संतुष्ट करें तो प्रतिचित्रणों T और f का M के कम से कम एक बिंदु पर संपात होता है अर्थात् M में कम से कम एक ऐसे बिंदु z का अस्तित्व होता है

कि $Tz = fz$. वर्ष 1983 में, एक वार्ता के दौरान प्रो० श्याम लाल सिंह ने प्रो० जी० युंक से यह पूछा भी था कि "Are you aware of Goebel's coincidence theorem which appeared in 1968?"

इस प्रश्न अर्थात् 'क्या आप 1968 में प्रकाशित गोबेल की संपात प्रमेय से परिचित हैं?' का प्रो० युंक ने नकारात्मक उत्तर दिया था।)

युंक के उक्त परिणाम ने संकुचनीय सिद्धांत में एक नयी दिशा को जन्म दिया. वस्तुतः युंक का उक्त परिणाम सर्वप्रथम सिंह [112] द्वारा व्यापकीकृत हुआ. उसके बाद अनेकों गणितज्ञों ने युंक प्रकार के संकुचन सिद्धांतों का प्रतिपादन किया. उदाहरणार्थ देखें [8], [11], [17]-[19], [30], [36], [50]-[52], [54], [60], [65], [69]-[71], [73], [75], [79]-[80], [86]-[87], [96], [98]-[99], [102]-[105], [113]-[114], [116]-[135], [137]-[139] एवं [142]-[144].

युंक प्रकार के संकुचन सिद्धांत में प्रतिचित्रणों की क्रमविनिमेयता (ऊपर (ज - 4) देखें) को शिथिल करने के कुछ सफल प्रयास किये गये हैं. इतालवी गणितज्ञ सेसा [102] ने क्रमविनिमेयता को दुर्बल क्रमविनिमेयता से प्रतिस्थापित किया तथा युंक [50] तथा तिवारी - सिंह [142] ने स्वतन्त्र रूप से क्रमशः सुसंगत प्रतिचित्रणों एवं उपगामी प्रतिचित्रणों की अवधारणा प्रस्तुत की. (इस संबंध में विस्तृत वर्णन हेतु तृतीय अध्याय, पृ० 56 देखें). युंक [49] का उक्त परिणाम विगत कुछ वर्षों में पर्याप्त सुधार के बाद युंक संकुचन सिद्धांत (मुससि) कहा जाता है (उदाहरणार्थ देखें [142]) -

प्रमेय 3. यदि दूरीक समष्टि M पर स्व-प्रतिचित्रण T और f प्रतिबंधों (ज - 1), (ज - 2) तथा

(ज - 4क) प्रतिचित्रण T एवं f उपगामी क्रमविनिमयी हों ;

व

(ज - 5) $f(M)$ समष्टि M का पूर्ण दूरीक उपसमष्टि हो ;

को संतुष्ट करते हों

तब T और f समष्टि M में एक अद्वितीय स्थिर बिंदु रखते हैं.

युसंसि अर्थात् प्रमेय 3 के प्रतिबंध (ज-4क) में उपगामी क्रमविनिमेयता को दुर्बल क्रमविनिमेयता अथवा प्रतिचित्रणों की सुसंगतता से प्रतिस्थापित किया जा सकता है.

ऐसा प्रतीत होता है कि युंक [49] की प्रमेय का 2-दूरीक समष्टि में सर्वप्रथम विस्तारण 1977-78 में किया गया (देखें [113] व [135]). इसके पश्चात् युंक के प्रमेय का व्यपकीकरण, विस्तारण व अनुप्रयोग विभिन्न समष्टियों एवं विन्यासों में किया गया (उदाहरणार्थ देखें [8], [11]-[12], [17]-[18], [24] -[25], [30], [36], [50]-[52], [54], [56], [71], [79], [104]-[105], [120], [122], [126], [129]-[132] एवं [144]).

4. आगामी अध्यायों की संक्षिप्त रूपरेखा

द्वितीय अध्याय में एक व्यापक विन्यास पर 2-दूरीक समष्टि पर एक प्रतिचित्रण समूह एवं अन्य दो प्रतिचित्रणों के संपात बिंदुओं के अस्तित्व का अध्ययन किया गया है तथा इन प्रतिचित्रणों के उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु के अस्तित्व हेतु क्रमविनिमेयता अथवा दुर्बल क्रमविनिमेयता अथवा उपगामी क्रमविनिमेयता के पूरे बल का परित्याग करने का प्रयास किया गया है. वस्तुतः प्रतिचित्रणों की क्रमविनिमेयता की आवश्यकता केवल संपाती बिंदुओं पर ही होती है. कुछ प्रमुख टिप्पणियों के साथ प्राप्त स्थिर बिंदु प्रमेयों के कुछ अनुप्रयोग भी दिए गये हैं.

तृतीय अध्याय में उन प्रतिचित्रण शर्तों का अन्वेषण किया गया है जिनके अधीन दो या तीन या चार प्रतिचित्रणों के उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु अद्वितीय नहीं हैं. हालांकि कुछ परिस्थितियों में उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु के अद्वितीय होने की परिस्थितियों पर भी विचार किया गया है... इस अध्याय में प्रतिचित्रणों को उपगामी/सुसंगत लिया गया है.

चतुर्थ अध्याय में बासंसि के विभिन्न व्यापकीकरणों में सहगल [100] द्वारा प्रदत्त परिणाम (देखें चतुर्थ अध्याय, प्रमेय 1) स्थिर बिंदु सिद्धांत में प्रमुख स्थान रखता है. वस्तुतः प्रतिबंध (ब - 1) (देखें इस अध्याय का अनुभाग 2) के स्थान पर प्रोफेसर सहगल ने निम्न प्रतिबंध का अध्ययन किया -

समष्टि M के प्रत्येक बिंदु x के लिए एक धनात्मक पूर्ण संख्या $n(x)$ का ऐसा अस्तित्व होता है कि समष्टि M के प्रत्येक बिंदु y के लिए

$$(ब-2) \quad d(f^{n(x)}x, f^{n(x)}y) \leq kd(x, y).$$

रंगनाथन [87] ने प्रतिबंध (ब - 2) का अध्ययन 2-दूरीक समष्टि पर किया. चतुर्थ अध्याय का प्रमुख उद्देश्य रंगनाथन के परिणाम का व्यपकीकरण करना है.

मान लें $P, Q, S, T, P_n, Q_n, S_n, T_n$
 $(n = 1, 2, \dots)$ किसी समष्टि पर स्व-प्रतिचित्रण हैं तथा u प्रतिचित्रणों P, Q, S, T का उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु है और u_n प्रतिचित्रणों $P_n, Q_n, S_n, T_n (n=1, 2, \dots)$ का स्थिर बिंदु है. पंचम अध्याय में उन शर्तों का अध्ययन किया गया है जिनके अधीन सम परिवेश समष्टि पर प्रतिचित्रण अनुक्रमों $\{P_n\}, \{S_n\}$ और $\{T_n\}$ के क्रमशः P, S और T को (बिंदुशः अथवा एक समान रूप से) अभिसरित होने की स्थिति में स्थिर बिंदु अनुक्रम $\{u_n\}$ बिंदु u को अभिसरित होता है. अंतिम अध्याय में इसी प्रकार का अध्ययन 2-दूरीक समष्टि के स्व-प्रतिचित्रण अनुक्रमों $\{P_n\}, \{Q_n\}, \{S_n\}$ और $\{T_n\}$ के क्रमशः P, Q, S और T को अभिसरित होने की स्थिति में किया गया है.

प्र. 2. यदि x_1, x_2, \dots, x_n एक सदिश है तो (x_1, x_2, \dots, x_n) का मान

होगा (x_1, x_2, \dots, x_n) का मान (x_1, x_2, \dots, x_n) का मान (x_1, x_2, \dots, x_n) का मान

होगा (x_1, x_2, \dots, x_n) का मान (x_1, x_2, \dots, x_n) का मान (x_1, x_2, \dots, x_n) का मान

होगा (x_1, x_2, \dots, x_n) का मान (x_1, x_2, \dots, x_n) का मान (x_1, x_2, \dots, x_n) का मान

होगा (x_1, x_2, \dots, x_n) का मान (x_1, x_2, \dots, x_n) का मान (x_1, x_2, \dots, x_n) का मान

होगा (x_1, x_2, \dots, x_n) का मान (x_1, x_2, \dots, x_n) का मान (x_1, x_2, \dots, x_n) का मान

होगा (x_1, x_2, \dots, x_n) का मान (x_1, x_2, \dots, x_n) का मान (x_1, x_2, \dots, x_n) का मान

द्वि ती य अ ध्या य

2-दूरीक समष्टि पर प्रतिचित्रण

समूह के संपात तथा स्थिर बिंदु

इस अध्याय में मनमाने समुच्चय पर 2-दूरीक प्रतिचित्रण समूह के लिए कुछ संपाती प्रमेय एवं स्थिर बिंदु प्रमेय प्रस्तुत किये गये हैं। कुछ अनुप्रयोग भी दिये गये हैं।

यह अध्याय निम्न अनुभागों में विभक्त है -

1. प्रारंभिकी
2. परिणाम
3. टिप्पणियाँ
4. अनुप्रयोग
5. हसियाओं के निष्कर्ष पर टिप्पणी

P. 15

संस्कृत भाषा

संस्कृत भाषा का परिचय

संस्कृत भाषा का विकास

संस्कृत भाषा का विकास प्राचीन काल से ही शुरू हुआ है।

इस भाषा में बहुत सारे शब्द हैं जो हमारे दैनिक जीवन में प्रयोग होते हैं।

इस भाषा का अध्ययन हमें बहुत कुछ सिखाता है।

1. संस्कृत भाषा

2. संस्कृत भाषा

3. संस्कृत भाषा

4. संस्कृत भाषा

5. संस्कृत भाषा

1. प्रारंभिकी

कुछ गणितज्ञों ने 2-दूरीक समष्टि में प्रतिचित्रणों के संपाती एवं स्थिर बिंदुओं के अस्तित्व का अध्ययन किया है. (उदाहरण के लिए देखें [10], [38], [65], [70], [86], [95], [115], [118], [128], [129], [132], [135], [137], [138], [143] और [144].

इस अध्याय में हम मनमाने समुच्चय पर 2-दूरीक समष्टि में मान रखने वाले प्रतिचित्रण समूह के लिए संपाती प्रमेयों तथा एक प्रतिचित्रण युगल के साथ क्रमविनिमयी प्रतिचित्रण समूह के लिए स्थिर बिंदु प्रमेयों की स्थापना कर रहे हैं. एक प्रमुख विशेषता यह है कि प्रतिचित्रणों की क्रमविनिमेयता की आवश्यकता केवल संपाती बिंदुओं पर है. कुछ अनुप्रयोग भी दिये गये हैं (देखें प्रमेय 5 - 6).

इस अध्याय में X हमेशा न्यूनतम तीन बिंदुओं वाले मनमाने समुच्चय के रूप में लिया जायेगा. N का प्रयोग प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय के रूप में, (M, d) का दूरीक (1 - दूरीक) समष्टि के रूप में, (Y, d) का 2-दूरीक समष्टि के रूप में एवं $H = \{\emptyset: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) \mid \emptyset \text{ उपरि सामिसंतत अट्रोसमान है एवं } \emptyset(t) < t, t > 0\}$. यदि S तथा P समष्टि Y पर प्रतिचित्रण है तब $C(SP)$ को S तथा P के समस्त संपाती बिंदुओं के समुच्चय के रूप में प्रयुक्त किया जायेगा, अर्थात् $C(SP) = \{z \mid Sz = Pz\}$.

हमें निम्न प्रमेयिका की आवश्यकता होगी.

प्रमेयिका [64]. मान लें $\emptyset \in H$ और $t_n > 0, n \in N$.

यदि $t_{n+1} \leq \emptyset(t_n), n \in N$, तब अनुक्रम $\{t_n\}$ शून्य पर अभिसरित होता है.

सेसा [102] तथा नायडू [70] का अनुसरण करते हुए :

परिभाषा 1. मान लें P और S , Y पर स्व-प्रतिचित्रण हैं. तब P और S को किसी बिंदु $y \in Y$ पर दुर्बल क्रमविनिमयी कहा जाता है. यदि प्रत्येक $a \in Y$ के लिए

$$d(PSy, SPy, a) \leq d(Sy, Py, a)$$

यदि P और S 2-दूरीक समष्टि Y के प्रत्येक बिंदु पर क्रमविनिमयी हैं तब यह कहा जाता है कि P और S 2-दूरीक समष्टि Y पर दुर्बल क्रमविनिमयी हैं. उल्लेख्य है कि यह आवश्यक नहीं है कि 2-दूरीक समष्टि पर कोई दुर्बल क्रमविनिमयी प्रतिचित्रण युगल, क्रमविनिमयी हो परंतु कोई क्रमविनिमयी प्रतिचित्रण युगल सदैव ही दुर्बल क्रमविनिमयी होगा (देखें [70], उदा. 2, तथा [96] और [104] भी). तथा यदि P और S किसी संपाती बिंदु z पर दुर्बल क्रमविनिमयी हैं तब निश्चय ही वें z पर क्रमविनिमयी हैं. वास्तव में, यदि $Sz = Pz$ तथा Y के प्रत्येक a के लिए,

$$d(PSz, SPz, a) \leq d(Sz, Pz, a) = 0,$$

अर्थात्

$$Sz = Pz.$$

संख्या 1031 का अर्थ है 1031 का अर्थ है 1031

यहाँ 1031 का अर्थ है 1031 का अर्थ है 1031
यहाँ 1031 का अर्थ है 1031 का अर्थ है 1031
यहाँ 1031 का अर्थ है 1031 का अर्थ है 1031

1031 का अर्थ है 1031 का अर्थ है 1031

यहाँ 1031 का अर्थ है 1031 का अर्थ है 1031
यहाँ 1031 का अर्थ है 1031 का अर्थ है 1031
यहाँ 1031 का अर्थ है 1031 का अर्थ है 1031
यहाँ 1031 का अर्थ है 1031 का अर्थ है 1031
यहाँ 1031 का अर्थ है 1031 का अर्थ है 1031
यहाँ 1031 का अर्थ है 1031 का अर्थ है 1031
यहाँ 1031 का अर्थ है 1031 का अर्थ है 1031
यहाँ 1031 का अर्थ है 1031 का अर्थ है 1031

1031 का अर्थ है 1031 का अर्थ है 1031

1031 का अर्थ है 1031 का अर्थ है 1031

1031 का अर्थ है 1031 का अर्थ है 1031

2. परिणाम

प्रमेय 1 . मान लें X एक मनमाना समुच्चय, Y एक 2-दूरीक समष्टि और $A_i : (i \in \mathbb{N}) X \rightarrow Y$ है. यदि प्रतिचित्रण $S, T : X \rightarrow Y$ इस प्रकार हैं कि $A_i(X) \subset S(X) \cap T(X)$, $i \in \mathbb{N}$ तथा समस्त $x, y \in X$ तथा समस्त $a \in Y$, $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$ के लिए, तब H के किसी \emptyset के लिए

$$(1.1) \quad d(A_i x, A_j y, a)$$

$$\leq \max \{ d(Sx, Ty, a), d(Sx, A_i x, a),$$

$$d(Ty, A_j y, a), \frac{1}{2}[d(Sx, A_j y, a) + d(Ty, A_i x, a)] \}$$

H के किसी \emptyset के लिए और

$$(1.2) \quad S(X) \cap T(X), Y \text{ का पूर्ण उपसमष्टि है तब प्रत्येक } i \in \mathbb{N} \text{ के लिए}$$

$$(i) \quad A_i \text{ और } S \text{ में संपात है,}$$

$$(ii) \quad A_i \text{ और } T \text{ में संपात है,}$$

तथा, यदि $X = Y$ और प्रत्येक A_i, S (क्रमशः T) के साथ $C(A_i S)$ (क्रमशः $C(A_i T)$) पर क्रमविनिमयित होता है, तब

$$(iii) \quad A_i (i \in \mathbb{N}), S \text{ और } T \text{ का अद्वितीय स्थिर बिंदु}$$

होगा.

प्रमाण - 2

माना x, y दो अलग-अलग बिंदु हों। x से y तक की दूरी 1 मान लें।

माना x, y दो अलग-अलग बिंदु हों। x से y तक की दूरी 1 मान लें।

माना x, y दो अलग-अलग बिंदु हों। x से y तक की दूरी 1 मान लें।

माना x, y दो अलग-अलग बिंदु हों। x से y तक की दूरी 1 मान लें।

माना x, y दो अलग-अलग बिंदु हों। x से y तक की दूरी 1 मान लें।

$$(a, \sqrt{a}, x, A)B$$

(1.1)

$$(a, \sqrt{a}, x, A)B, (a, \sqrt{a}, x, A)B \text{ माना जाये}$$

$$((1.1), (a, \sqrt{a}, x, A)B, (a, \sqrt{a}, x, A)B) \text{ माना जाये}$$

माना x, y दो अलग-अलग बिंदु हों। x से y तक की दूरी 1 मान लें।

$$(1.2) \quad x, (x)T \cap (x)S$$

माना x, y दो अलग-अलग बिंदु हों। x से y तक की दूरी 1 मान लें।

$$(1) \quad x, (x)T \cap (x)S$$

$$(11) \quad x, (x)T \cap (x)S$$

माना x, y दो अलग-अलग बिंदु हों। x से y तक की दूरी 1 मान लें।

$$(111) \quad x, (x)T \cap (x)S$$

$$(1111) \quad x, (x)T \cap (x)S$$

उपपत्ति. X में x_0 लें. क्योंकि $A_1(X) \subset T(X)$, $x_1 \in X$ इस प्रकार ले सकते हैं कि $Tx_1 = A_1x_0$. इसी प्रकार, क्योंकि $A_2(X) \subset S(X)$, $x_2 \in X$ इस प्रकार हैं कि $Sx_2 = A_2x_1$ व्यापक रूप में, हम X में अनुक्रम $\{x_n\}$ तथा Y में $\{y_n\}$ की रचना इस प्रकार कर सकते हैं कि

$$y_{2n} = Sx_{2n} = A_{2n}x_{2n-1}$$

और

$$y_{2n+1} = Tx_{2n+1} = A_{2n+1}x_{2n}$$

निश्चयात्मक कथन 1. $d_n = d(y_n, y_{n+1}, a)$, $d_n \rightarrow 0$ के लिए,

(1.1) से

$$(1.3) \text{ से निम्न } d_{2n+1} = d(A_{2n+1}x_{2n}, A_{2n+2}x_{2n+1}, a)$$

$$\leq \phi(\text{अधिकतम } \{d_{2n}, d_{2n+1}, \frac{1}{2}d(y_{2n}, y_{2n+2}, a)\}).$$

अर्थात्

$$(1.3) \quad d_{2n+1}$$

$$\leq \phi(\text{अधिकतम } \{d_{2n}, d_{2n+1}, \frac{1}{2}d(y_{2n}, y_{2n+2}, a)\}).$$

मान लें $w_n = d(y_n, y_{n+1}, y_{n+2})$. यदि $w_{2n} \neq 0$ तब

(1.3) में $a = y_{2n}$ लेने पर निम्न प्राप्त होता है

$X \in X, (X)T \subset (X)A$ किन्तु $X \notin X$ किन्तु $X \in X$
 $(X)T \subset (X)A$ किन्तु $X \notin X$ किन्तु $X \in X$
 $X \in X, (X)T \subset (X)A$ किन्तु $X \notin X$ किन्तु $X \in X$
 $(X)T \subset (X)A$ किन्तु $X \notin X$ किन्तु $X \in X$

$$1 - n^2 X \cdot n^2 A = n^2 X \cdot n^2 A = n^2 X \cdot n^2 A$$

$$n^2 X \cdot 1 + n^2 A = 1 + n^2 X \cdot n^2 A = 1 + n^2 X \cdot n^2 A$$

$q(0) = 0, q(1) = 1, q(2) = 2, \dots, q(n) = n$

(1.1)

$$q(2n+1) = q(2n) + 1 = 2n + 1$$

$$q(2n+1) = q(2n) + 1 = 2n + 1$$

किन्तु

$$q(2n+1) = q(2n) + 1 = 2n + 1 \quad (1.3)$$

$$q(2n+1) = q(2n) + 1 = 2n + 1$$

$$q(2n+1) = q(2n) + 1 = 2n + 1$$

$$q(2n+1) = q(2n) + 1 = 2n + 1 \quad (1.4)$$

$$w_{2n} \leq \emptyset(w_{2n}) < w_{2n},$$

जो एक विरोध है. इसलिए

$$(1.4) \quad w_{2n} = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{क्योंकि } d(y_{2n}, y_{2n+2}, a) &\leq d_{2n} + d_{2n+1} + d(y_{2n}, y_{2n+1}, y_{2n+2}) \\ &= d_{2n} + d_{2n+1}, \end{aligned}$$

(1.3) से निम्न प्राप्त होता है

$$\begin{aligned} &d_{2n+1} \\ &\leq \emptyset(\text{अधिकतम } \{d_{2n}, d_{2n+1}, \frac{1}{2}(d_{2n} + d_{2n+1})\}). \end{aligned}$$

यदि $d_{2n+1} \neq 0$ और $d_{2n+1} > d_{2n}$, तब

$$\begin{aligned} &d_{2n+1} \\ &\leq \emptyset(\text{अधिकतम } \{d_{2n+1}, \frac{1}{2}(d_{2n+1} + d_{2n})\}) \\ &= \emptyset(d_{2n+1}) < d_{2n+1}. \end{aligned}$$

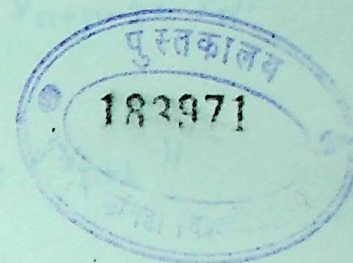
इसलिए

$$d_{2n+1} \leq d_{2n} \text{ और } d_{2n+1} \leq \emptyset(d_{2n}).$$

संदृष्टतया,

(1.4')

$$w_{2n+1} = 0,$$



$$d_{2n+2} \leq d_{2n+1} \text{ और } d_{2n+2} \leq \emptyset(d_{2n+1}).$$

इस प्रकार, प्रत्येक $n \in \mathbb{N}$ के लिए, $d_{n+1} \leq d_n$ और $d_{n+1} \leq \emptyset(d_n)$.

अब प्रमेयिका के आलोक में निश्चयात्मक कथन सत्य है.

निश्चयात्मक कथन 2. जबकि $m \in \mathbb{N}$, $d(y_n, y_{n+1}, y_m) = 0$.

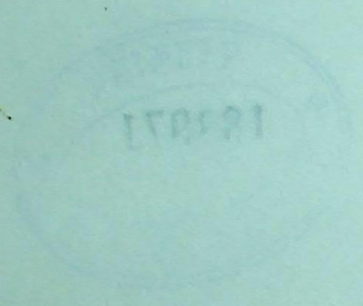
अब, (1.4) और (1.4') के आलोक में $d(y_n, y_{n+1}, y_{n+2}) = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

स्पष्टतया यह निश्चयात्मक कथन $m = n, n+1$ के लिए सत्य है. यदि $m > n+1$, मान लें $m = n+p$, $p > 1$.

$$d(y_n, y_{n+1}, y_m) \leq d(y_n, y_{n+1}, y_{m-1})$$

$$+ d(y_m, y_{m-1}, y_n) + d(y_m, y_{m-1}, y_{n+1})$$

$$q_{2n+1} < q_{2n} \text{ और } q_{2n+1} < q_{2n+2}$$



$$q_{2n+1} = 0$$

(1.4)

$$q_{2n+2} < q_{2n+1} \text{ और } q_{2n+2} < q_{2n+3}$$

इस प्रकार, यदि $n \in \mathbb{N}$ के लिए $q_n < q_{n+1}$ और $q_n < q_{n+2}$ है, तो हम कह सकते हैं कि $\{q_n\}$ एक वृद्धिमान अनुक्रम है।

निम्नलिखित प्रमेय 3.1 में $\{q_n\}$ के लिए $n \in \mathbb{N}$ के लिए $q_n < q_{n+1}$ और $q_n < q_{n+2}$ का प्रमाण दिया गया है।

प्रमेय 3.1 (1.4) के अनुसार $q_n < q_{n+1}$ और $q_n < q_{n+2}$ के लिए $n \in \mathbb{N}$ के लिए $q_n < q_{n+1}$ और $q_n < q_{n+2}$ का प्रमाण दिया गया है।

प्रमेय 3.1 के अनुसार $q_n < q_{n+1}$ और $q_n < q_{n+2}$ के लिए $n \in \mathbb{N}$ के लिए $q_n < q_{n+1}$ और $q_n < q_{n+2}$ का प्रमाण दिया गया है।

इस प्रकार, यदि $n \in \mathbb{N}$ के लिए $q_n < q_{n+1}$ और $q_n < q_{n+2}$ है, तो हम कह सकते हैं कि $\{q_n\}$ एक वृद्धिमान अनुक्रम है।

$$(1 - q_n)(1 - q_{n+1}) < (1 - q_{n+1})(1 - q_{n+2})$$

$$(1 - q_n)(1 - q_{n+1}) < (1 - q_{n+1})(1 - q_{n+2})$$

$$\begin{aligned}
&\leq d(y_n, y_{n+1}, y_{m-1}) + \emptyset(d(y_{m-1}, y_{m-2}, y_n)) \\
&+ \emptyset(d(y_{m-1}, y_{m-2}, y_{n+1})) = d(y_n, y_{n+1}, y_{n+p-1}) \\
&+ \emptyset(d(y_{n+p-1}, y_{n+p-2}, y_n)) \\
&+ \emptyset(d(y_{n+p-1}, y_{n+p-2}, y_{n+1})) \\
&\leq d(y_n, y_{n+1}, y_{n+p-1}) + \emptyset^{p-1}(d(y_{n+1}, y_n, y_n)) \\
&+ \emptyset^{p-1}(d(y_{n+1}, y_n, y_{n+1})) \\
&= d(y_n, y_{n+1}, y_{n+p-1}) + 2\emptyset^{p-1}(0),
\end{aligned}$$

अर्थात्

$$d(y_n, y_{n+1}, y_m)$$

$$\leq d(y_n, y_{n+1}, y_{n+p-1})$$

$$\leq d(y_n, y_{n+1}, y_{n+p-2}) \leq \dots$$

$$\leq d(y_n, y_{n+1}, y_{n+1}) = 0.$$

$$B(Y_n, Y_{n+1}, Y_{n-1}) + B(Y_{n-1}, Y_n, Y_{n+1})$$

$$+ B(Y_{n-1}, Y_{n-2}, Y_{n-3}) - B(Y_n, Y_{n+1}, Y_{n-1})$$

$$+ B(Y_{n+1}, Y_{n-1}, Y_{n-2})$$

$$+ B(Y_{n-1}, Y_{n-2}, Y_{n-3})$$

$$+ B(Y_n, Y_{n+1}, Y_{n-1}) + B(Y_{n-1}, Y_n, Y_{n+1})$$

$$+ B(Y_{n-1}, Y_{n+1}, Y_{n+2})$$

$$= B(Y_n, Y_{n+1}, Y_{n-1}) + B(Y_{n-1}, Y_n, Y_{n+1})$$

plus

$$B(Y_n, Y_{n+1}, Y_{n-1})$$

$$B(Y_n, Y_{n+1}, Y_{n-1})$$

$$B(Y_n, Y_{n+1}, Y_{n-1})$$

$$B(Y_n, Y_{n+1}, Y_{n-1})$$

यदि $m < n$, मान लें $n = m+t$, $t \geq 1$. तब, क्योंकि

$$d_{n+1} \leq d_n,$$

$$d(y_n, y_{n+1}, y_m) = d(y_{m+t}, y_{m+t+1}, y_m)$$

$$\leq d(y_{m+t-1}, y_{m+t}, y_m) \leq \dots$$

$$\leq d(y_m, y_{m+1}, y_m) = 0.$$

निश्चयात्मक कथन 3. $d(y_i, y_j, y_p) = 0$, $i, j, p \in \mathbb{N}$.

व्यापकता की किसी भी हानि के बिना हम $j < p$ ले सकते हैं. मान लें $p = j+r$
 $r \geq 1$. तब

$$d(y_i, y_j, y_{j+r})$$

$$\leq d(y_i, y_j, y_{j+r-1}) + d(y_i, y_{j+r-1}, y_{j+r})$$

$$+ d(y_{j+r-1}, y_j, y_{j+r}).$$

अंतिम दो पद निश्चयात्मक कथन 2 से शून्य हो जाते हैं. इसलिए

माना a_1, a_2, \dots, a_n एक क्रम है, $n \geq 1$ हो

$$a_{n+1} = a_n + b$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = (n+1)a_1 + \frac{n(n-1)}{2}b$$

$$\dots + a_{n-1} + a_n = (n+1)a_1 + \frac{n(n-1)}{2}b$$

$$0 = (n+1)a_1 + \frac{n(n-1)}{2}b$$

अतः $a_1 = -\frac{n(n-1)}{2}b$ है।

अतः $a_1 = -\frac{n(n-1)}{2}b$ है।

अतः $a_1 = -\frac{n(n-1)}{2}b$ है।

$$a_1 = -\frac{n(n-1)}{2}b$$

$$a_1 = -\frac{n(n-1)}{2}b$$

$$a_1 = -\frac{n(n-1)}{2}b$$

$$d(y_i, y_j, y_{j+r}) \leq d(y_i, y_j, y_{j+r-1})$$

$$\leq d(y_i, y_j, y_{j+r-2}) \leq \dots$$

$$\leq d(y_i, y_j, y_j) = 0,$$

इस प्रकार कथन सिद्ध होता है.

निश्चयात्मक कथन 4. $\{y_n\}$ एक कौशी अनुक्रम है.

यह सिद्ध करना पर्याप्त है कि $\{y_{2n}\}$ एक कौशी अनुक्रम है. मान लें कि ऐसा नहीं है. तब $\epsilon > 0$ ऐसा है कि प्रत्येक पूर्णांक $2k$ के लिए पूर्णांक $2n(k)$ और $2m(k)$

$$2k \leq 2n(k) < 2m(k)$$

को संतुष्ट करते हुए इस प्रकार हैं कि किसी $a \in Y$ के लिए

$$(1.5) \quad d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}, a) > \epsilon.$$

प्रत्येक पूर्णांक $2k$ के लिए मान लें $2m(k), 2n(k)$ से अधिक न्यूनतम ऐसा पूर्णांक है जो (1.5) को संतुष्ट करता है. इस प्रकार

$$(1.6) \quad d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}, a) \leq \epsilon.$$

$$d(Y_1, Y_2, \dots, Y_{r-1}, Y_r) \leq d(Y_1, Y_2, \dots, Y_{r-1}, Y_r) \leq d(Y_1, Y_2, \dots, Y_{r-1}, Y_r) \leq \dots$$

$$\dots \leq d(Y_1, Y_2, \dots, Y_{r-1}, Y_r) \leq \dots$$

$$0 \leq d(Y_1, Y_2, \dots, Y_r) \leq \dots$$

इस प्रकार हमने सिद्ध किया है।

निम्नलिखित प्रमेय 4. (Y_n) एक श्रेणी अनुक्रम है।

यदि (Y_n) एक श्रेणी अनुक्रम है तो (Y_n) एक श्रेणी अनुक्रम है।

यदि (Y_n) एक श्रेणी अनुक्रम है तो (Y_n) एक श्रेणी अनुक्रम है।

$$S_n(k) \text{ और } S_m(k)$$

$$S_k \leq S_n(k) < S_m(k)$$

यदि (Y_n) एक श्रेणी अनुक्रम है तो (Y_n) एक श्रेणी अनुक्रम है।

$$(1.2) \quad d(Y_{2n}(k), Y_{2m}(k)) \leq d(Y_n(k), Y_m(k))$$

यदि (Y_n) एक श्रेणी अनुक्रम है तो (Y_n) एक श्रेणी अनुक्रम है।

यदि (Y_n) एक श्रेणी अनुक्रम है तो (Y_n) एक श्रेणी अनुक्रम है।

$$(1.3) \quad d(Y_{2n}(k), Y_{2m}(k)) \leq d(Y_n(k), Y_m(k))$$

प्रत्येक $2k$ के लिए

$$(1.7) \quad \epsilon < d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}, a)$$

$$\leq d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-2}, a) + d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}, y_{2m(k)-2}) \\ + d(y_{2m(k)}, y_{2m(k)-2}, a).$$

क्योंकि मध्य पद (यहाँ तथा निम्नलिखित असमिका के दायें पक्ष में भी शून्य हो जाता है) और

$$d(y_{2m(k)}, y_{2m(k)-2}, a) \\ \leq d(y_{2m(k)}, y_{2m(k)-1}, a) + d(y_{2m(k)}, y_{2m(k)-2}, y_{2m(k)-1}) \\ (1.8) \quad + d(y_{2m(k)-1}, y_{2m(k)-2}, a).$$

हमें ज्ञात है

$$\epsilon < d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}, a) \\ \leq d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-2}, a) + d_{2m(k)-1} + d_{2m(k)-2}.$$

प्रत्येक 2K के लिए

$$a \leq q(Y_{2n}(K), Y_{2m}(K), a)$$

$$\leq q(Y_{2n}(K), Y_{2m}(K)-2, a) + q(Y_{2n}(K), Y_{2m}(K), Y_{2m}(K)-2)$$

$$+ q(Y_{2n}(K), Y_{2m}(K)-2, a)$$

कोई मान न हो (यहाँ का प्रारम्भिक मान 0 के बराबर है)

हो जाता है और

$$a \leq q(Y_{2n}(K), Y_{2m}(K)-2, a)$$

$$\leq q(Y_{2n}(K), Y_{2m}(K)-1, a) + q(Y_{2n}(K), Y_{2m}(K)-2, Y_{2m}(K)-1)$$

$$+ q(Y_{2n}(K)-1, Y_{2m}(K)-2, a)$$

हो जाता है

$$a \leq q(Y_{2n}(K), Y_{2m}(K), a)$$

$$\leq q(Y_{2n}(K), Y_{2m}(K)-1, a) + q(Y_{2n}(K)-1, Y_{2m}(K)-2, a)$$

(1.6) और निश्चयात्मक कथन 1 के प्रयोग करने पर

$$(1.7) \quad \sum_k d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}, a) = \epsilon.$$

अब

$$\begin{aligned} & d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}, a) \\ & \leq d(y_{2n(k)}, y_{2n(k)+1}, a) + d(y_{2n(k)+1}, y_{2m(k)}, a) \\ & \quad + d(y_{2m(k)}, y_{2n(k)+1}, y_{2m(k)}). \end{aligned}$$

(यहां अंतिम पद निश्चयात्मक कथन 3 से शून्य है.)

$$= d_{2n(k)} + d(A_{2n(k)+1} x_{2n(k)}, A_{2m(k)} x_{2m(k)-1}, a)$$

$$(1.8) \quad \leq d_{2n(k)}$$

$$+ \emptyset (\text{अधिकतम } \{ d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-1}, a), d_{2n(k)},$$

$$d_{2m(k)-1}, \frac{1}{2}[d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}, a) + d(y_{2m(k)-1}, y_{2n(k)+1}, a)] \}).$$

क्योंकि

$$d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-1}, a)$$

$$\leq d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-2}, a) + d_{2m(k)-2}$$

(1.4) The following is a list of the

(1.5) The following is a list of the

or

$$d(Y_{2n}(k), Y_{2m}(k), a)$$

$$d(Y_{2n}(k), Y_{2m}(k+1), a) + d(Y_{2n}(k+1), Y_{2m}(k+1), a)$$

$$+ d(Y_{2n}(k), Y_{2m}(k+1), Y_{2m}(k))$$

(The following is a list of the

$$= d(Y_{2n}(k), Y_{2m}(k+1), Y_{2m}(k)) + d(Y_{2n}(k+1), Y_{2m}(k+1), Y_{2m}(k))$$

(1.8) $d(Y_{2n}(k))$

$$+ d(Y_{2n}(k), Y_{2m}(k+1), Y_{2m}(k))$$

$$d(Y_{2n}(k), Y_{2m}(k+1), Y_{2m}(k)) + d(Y_{2n}(k+1), Y_{2m}(k+1), Y_{2m}(k))$$

or

$$d(Y_{2n}(k), Y_{2m}(k+1), Y_{2m}(k))$$

$$+d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-2}, y_{2m(k)}),$$

$$d(y_{2m(k)-1}, y_{2n(k)+1}, a)$$

$$\leq d_{2n(k)} + d(y_{2m(k)-1}, y_{2n(k)}, a)$$

$$+ d(y_{2m(k)-1}, y_{2n(k)+1}, y_{2n(k)})$$

और, निश्चयात्मक कथन 3 से इन असमिकाओं में से प्रत्येक में अंतिम पद शून्य है, (1.8) से हमें निम्न ज्ञात है

$$d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}, a)$$

$$\leq d_{2n(k)} + \text{अधिकतम } \{d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-2}, a)$$

$$+ d_{2m(k)-2}, d_{2n(k)}, d_{2m(k)-1},$$

$$\frac{1}{2}[2d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}, a) + d_{2n(k)}$$

$$+ d_{2m(k)-2}] \}).$$

$$+q(Y_{2m}(k), Y_{2m}(k)-2, Y_{2m}(k))$$

$$q(Y_{2m}(k)-1, Y_{2m}(k)+1, a)$$

$$< q_{2m}(k) + q(Y_{2m}(k)-1, Y_{2m}(k), a)$$

$$+ q(Y_{2m}(k)-1, Y_{2m}(k)+1, Y_{2m}(k))$$

और निम्नलिखित समान 3 है इन अभिव्यक्तियों में से एक से अधिक में शून्य है (1.8)

$$q(Y_{2m}(k), Y_{2m}(k), a)$$

$$< q_{2m}(k) + q(Y_{2m}(k)-1, Y_{2m}(k)-3, a)$$

$$+ q_{2m}(k)-2, q_{2m}(k), q_{2m}(k)-1,$$

$$+ q(Y_{2m}(k), Y_{2m}(k), a) + q_{2m}(k)$$

$$+ q_{2m}(k)-2, 1)$$

k को अनंत करने पर, निश्चयात्मक कथन 1 के साथ (1.6) और (1.7) प्रयोग करने पर $\epsilon \leq \emptyset(\epsilon) < \epsilon$, प्राप्त होता है जो $\epsilon > 0$ का विरोध है. इस प्रकार निश्चयात्मक कथन 4 सिद्ध हुआ.

अब हम निष्कर्ष (i) और (ii) को दर्शाते हैं. क्योंकि $S(X) \cap T(X)$ 2-दूरीक समष्टि Y का पूर्ण-उपसमष्टि है अतः कोशी अनुक्रम $\{y_n\}$ किसी बिन्दु u पर अभिसरित होता है, और z एवं z' इस प्रकार है कि $z \in S^{-1}u$ और $z' \in T^{-1}u$.

इस प्रकार $u = Sz$, और (1.1) से

$$d(A_i z, y_{2n+2}, a) = d(A_i z, A_{2n+2} x_{2n+1}, a)$$

$$\leq \emptyset(\text{अधिकतम } \{d(Sz, y_{2n+1}, a), d(Sz, A_i z, a),$$

$$d(y_{2n+1}, y_{2n+2}, a),$$

$$\frac{1}{2}[d(Sz, y_{2n+2}, a) + d(y_{2n+1}, A_i z, a)]).$$

इससे, सीमांत मान लेने पर,

$$d(A_i z, u, a)$$

$$\leq \emptyset(\text{अधिकतम } \{0, d(u, A_i z, a), 0, \frac{1}{2}d(u, A_i z, a)\})$$

हम मान लें $(x, 1)$ और $(a, 1)$ का 1 का एक गुणगुणन है, यह निकलता है कि x
 मान $0 < x < 1$ का है, यदि $x > 1$ हो तो $x > 1$ का एक गुणगुणन है।
 मान लें $x > 1$ का एक गुणगुणन है।

हम मान लें कि $(x, 1)$ और $(a, 1)$ का 1 का एक गुणगुणन है।
 मान लें कि $x > 1$ का एक गुणगुणन है।
 मान लें कि $x > 1$ का एक गुणगुणन है।

$$x^{-1} > 1, x^{-1} > 1$$

हम मान लें $(x, 1)$ और $(a, 1)$ का 1 का एक गुणगुणन है।

$$q(a, x, 1, 1) = q(a, x, 1, 1) + q(a, x, 1, 1)$$

$$q(a, x, 1, 1) = q(a, x, 1, 1) + q(a, x, 1, 1)$$

$$q(a, x, 1, 1) = q(a, x, 1, 1) + q(a, x, 1, 1)$$

$$q(a, x, 1, 1) = q(a, x, 1, 1) + q(a, x, 1, 1)$$

हम मान लें $(x, 1)$ और $(a, 1)$ का 1 का एक गुणगुणन है।

$$q(a, x, 1, 1) = q(a, x, 1, 1) + q(a, x, 1, 1)$$

$$q(a, x, 1, 1) = q(a, x, 1, 1) + q(a, x, 1, 1)$$

$$= \emptyset (d(u, A_i z, a)),$$

प्राप्त होता है.

यदि $u \neq A_i z$ तब क्योंकि d एक 2-दूरीक है, Y के कम से कम एक a के लिए

$$d(u, A_i z, a) \neq 0.$$

अतः

$$d(A_i z, u, a)$$

$$\leq \emptyset (d(u, A_i z, a)) < d(u, A_i z, a),$$

जो एक विरोध है. इस कारण $Sz = u = A_i z$ और यह किसी भी $i \in N$ के लिए सत्य है.

इसी प्रकार

$$Tz' = u = A_i z', \quad i \in N.$$

प्रमेय का अंतिम भाग सिद्ध करने के लिए, यह स्पष्ट है कि $C(A_i S)$ और $C(A_i T)$ अरिक्त समुच्चय हैं और उपरोक्त $z \in C(A_i S)$, $z' \in C(A_i T)$ और u के लिए हमें ज्ञात है कि

$$Sz = A_i z = u = Tz' = A_j z',$$

$$A_i u = A_i Sz = SA_i z = Su,$$

और

$$A_j u = A_j Tz' = TA_j z' = Tu.$$

इन संबंधो तथा (1.1) के प्रयोग से हम निम्न परिणाम पर पहुँचते हैं.

$$d(A_i z, A_j u, a)$$

$$\leq \emptyset \text{ (अधिकतम } \{d(Sz, Tu, a), d(Sz, A_i z, a),$$

$$d(Tu, A_j u, a), \frac{1}{2}[d(Sz, A_j u, a)$$

$$+ d(Tu, A_i z, a)]\}).$$

अर्थात्

$$d(u, A_j u, a) = \emptyset(d(u, A_j u, a)),$$

फलस्वरूप

$$u = A_j u.$$

यह किसी भी $j \in N$ के लिए सत्य है. इस प्रकार

$$Tu = A_j u = Su = u, \quad j \in N.$$

अब हम प्रमेय 1 के एक परिवर्त का उल्लेख करते हैं परन्तु उससे पहले कुछ परिभाषाएँ दे रहे हैं.

परिभाषा 2. मान लें S, T और A_i ($i \in \mathbb{N}$) X पर ऐसे प्रतिचित्रण है जिनके मान 2-दूरीक समष्टि Y में हैं, यदि, X में किसी x_0 के लिए X में अनुक्रम $\{x_n\}$ तथा Y में $\{y_n\}$ इस प्रकार हों कि

$$y_{2n+1} = Tx_{2n+1} = A_{2n+1}x_{2n}$$

और

$$y_{2n+2} = Sx_{2n+2} = A_{2n+2}x_{2n+1}, \quad n=0, 1, 2, \dots,$$

तब $O(A_i; S, T, x_0) = \{y_n\}$ को x_0 के सापेक्ष $(A_i; S, T)$ -कक्षकतः पूर्ण कहा जायेगा अथवा केवल $(A_i; S, T, x_0)$ कक्षकतः पूर्ण कहा जायेगा यदि कौशी अनुक्रम $\{y_n\}$, Y में अभिसरित हो.

प्रायिकतात्मक दूरीक समष्टि Y में $Y=X$ तथा $P=A_i$, $i \in \mathbb{N}$ लेकर इन परिभाषाओं के लिए सिंह और पंत[130]का अवलोकन करें. ([10] और [143] भी देखें.)

प्रमेय 2. मान लें X एक मनमाना समुच्चय, Y एक 2-दूरीक समष्टि और A_i ($i \in \mathbb{N}$): $X \rightarrow Y$ हैं. यदि प्रतिचित्रण $S, T : X \rightarrow Y$ इस प्रकार हैं कि प्रत्येक $x, y \in X$, प्रत्येक $a \in Y$, $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$ के लिए शर्त (1.1) संतुष्ट होती है और

$$(2.1) \quad X \text{ में } x_0 \text{ इस प्रकार है कि } S(X) \cap T(X), (A_i; S, T, x_0) -$$

कक्षकतः पूर्ण है, तब प्रमेय 1 की शर्त (i) और (ii) संतुष्ट होती है और

अतः हमें यह मान लेना पड़ेगा कि T के एक ही मान पर X का मान Y के मान से अधिक है।
 ३. ४. ५.

परिभाषा ३. मान ले T, A और V को X के मान से अधिक मान दें।
 परिभाषा ३. मान ले T, A और V को X के मान से अधिक मान दें।
 X के मान से अधिक मान दें।

$$Y_{2n+1} = T_{2n+1} = V_{2n+1}$$

$$Y_{2n+2} = T_{2n+2} = V_{2n+2} \quad n=0, 1, 2, \dots$$

मान ले (A, T, V) को X के मान से अधिक मान दें।
 मान ले (A, T, V) को X के मान से अधिक मान दें।
 मान ले (A, T, V) को X के मान से अधिक मान दें।

परिभाषा ३. मान ले T, A और V को X के मान से अधिक मान दें।
 मान ले (A, T, V) को X के मान से अधिक मान दें।
 मान ले (A, T, V) को X के मान से अधिक मान दें।

परिभाषा ३. मान ले T, A और V को X के मान से अधिक मान दें।
 मान ले (A, T, V) को X के मान से अधिक मान दें।
 मान ले (A, T, V) को X के मान से अधिक मान दें।

$$(2.1) \quad X = T_{2n+1} = V_{2n+1}$$

मान ले (A, T, V) को X के मान से अधिक मान दें।

$O(A_i; S, T, x_0)$ फलनों S, T , और $A_i, i \in N$ के संपाती मान पर अभिसरित होता है अर्थात् यदि $O(A_i; S, T, x_0)$ बिन्दु u पर अभिसरित होता है, तब z और z' समुच्चय X में इस प्रकार हैं कि

$$Sz = A_i z = u = Tz' = A_i z'.$$

और यदि $X = Y$ तथा प्रत्येक $i \in N$ के लिए,

$$SA_i z = A_i Sz \quad \text{और} \quad TA_i z' = A_i Tz',$$

तब (iii) $A_i (i \in N),$

S और T का अद्वितीय सर्वनिष्ठ स्थिर बिंदु होगा.

$S, T, A_i (i \in N): X \rightarrow Y$ के लिए निम्न शर्त पर विचार करें :

$$(3.1) \quad d(A_i x, A_j y, a)$$

$$\leq \emptyset (\text{अधिकतम } \{d(Sx, Ty, a), d(Sx, A_i x, a),$$

$$d(Ty, A_j y, a), d(Sx, A_j y, a),$$

$$d(Ty, A_i x, a)\})).$$

$$x, y \in X, a \in Y, i, j \in N, i \neq j.$$

हमारा कथन है कि (1.1) से (3.1) प्राप्त होती है अर्थात् (1.1) को संतुष्ट करते हुए प्रतिचित्रण A_i, S, T (3.1) को भी संतुष्ट करते हैं. तथा प्रमेय 1-2, (1.1) को (3.1) से विस्थापित करने पर कुछ अतिरिक्त शर्तों के अभाव में, यहाँ तक कि दूरीक समष्टि में भी प्रायः असत्य होगी. निम्न उदाहरण पर विचार करें. यह डो होंग तान से व्यक्तिगत पत्राचार में प्राप्त हुआ था. यद्यपि संदर्भ भिन्न था ; शास्त्री एवं नायडू [27] का भी अवलोकन करें.

उदाहरण 1. मान लें कि (M, d) एक दूरीक समष्टि है जहाँ

$$M = \{a, b, a', b'\},$$

$$d(a, a') = d(a, b) = d(b, a) = d(b, b') = 1,$$

$$d(a, b) = d(a', b') = 2.$$

मान लें P और Q , M पर प्रतिचित्रण इस प्रकार हैं कि

$$P(a) = P(a') = b, \quad P(b) = P(b') = a,$$

$$Q(a) = Q(b') = a', \quad Q(b) = Q(a') = b',$$

क्योंकि

$$P(M) = \{a, b\}, \quad Q(M) = \{a', b'\},$$

इस प्रकार सदैव

$$d(Px, Qy) = 1.$$

तथा अधिकतम $\{d(x, y), d(x, Sx),$

$$d(y, Ty), d(y, Sx),$$

$$(111) \quad A_1(1 \in d(x, Ty)) = 2.$$

हमारा कथन है कि $\{P, Q\} = \{A_i (i \in N) : M \rightarrow M\}$ और $S = T$ जो M पर तत्समक प्रतिचित्रण है, के लिए (3.1) का दूरीक सदृश निम्न है :

$$(3.1') \quad d(Px, Qy) \leq \varnothing(\text{अधिकतम } \{d(x, y), d(x, Px),$$

$$d(y, Qy), d(x, Qy), d(y, Px)\}), x, y \in M.$$

स्पष्टतया (3.1'), $\varnothing(t) = kt, k \in [\frac{1}{2}, 1)$ के लिए संतुष्ट होती है और P, Q में संपात नहीं है.

प्रमेय 3. मान लें X कोई मनमाना समुच्चय, Y एक 2-दूरीक समष्टि और $A_i (i \in N) : X \rightarrow Y$ हैं; यदि प्रतिचित्रण $S, T : X \rightarrow Y$ इस प्रकार है कि समस्त $x, y \in X$ तथा समस्त $a \in Y, i, j \in N, i \neq j$ के लिए शर्तें (3.1), (2.1) और

(3.2) सीमा $d(y_n, y_{n+1}, a) = 0$, संतुष्ट होते हैं तब प्रमेय 1 के निष्कर्ष (i) और (ii) प्राप्त होते हैं और $0(A_i; S, T, x_0)$ S, T और $A_i (i \in N)$ के संपात मान पर अभिसरित होता है. ब्रह्मव में, यदि $y_n \rightarrow 0$

$$((x_2, x)b, (y, x)b) \text{ समानान्तर है}$$

195

$$((x_2, y)b, (yT, y)b)$$

$$S = \{(yT, x)b$$

माना $M = (N, \cup, A) = (Q, \cup)$ की है इसका आधार

है $(1, 1)$ जो कि S समानान्तर है M में $T = 2$

: है

$$(3.1) \quad ((x_2, x)b, (y, x)b) \text{ समानान्तर है } ((yQ, xQ)b$$

$$((y, Qy), (x, Qy), (yQ, xQ)b, (yQ, y)b$$

माना (3.1) $((x, x) = (y, y))$ $(1, 1)$ है जो कि S समानान्तर है

P, Q में समानान्तर है

माना S X में समानान्तर है X में S समानान्तर है

माना $A = (N, \cup, A) = (Q, \cup)$ की है इसका आधार

है $(1, 1)$ जो कि S समानान्तर है M में $T = 2$

माना $(1, 1)$ $(1, 1)$ है जो कि S समानान्तर है

$$(3.2) \quad ((y, y), (x, x)) = (y, y) \text{ समानान्तर है}$$

माना $(1, 1)$ $(1, 1)$ है जो कि S समानान्तर है

माना $A = (N, \cup, A) = (Q, \cup)$ की है इसका आधार

तब X में z, z' इस प्रकार हैं कि $A_i z = Sz = u = A_i z' = Tz', i \in N$,
 तथा, यदि $X = Y$ और प्रत्येक $i \in N$ के लिए $SA_i z = A_i Sz$ और
 $TA_i z' = A_i Tz'$ तब

(iii) $A_i (i \in N), S$ और T का अद्वितीय सर्वनिष्ठ स्थिर बिंदु होगा.

उपपत्ति. आवश्यक परिवर्तनों के साथ प्रमेय 1 की उपपत्ति की तरह है.

प्रमेय 4. मान लें X कोई मनमाना समुच्चय, Y एक 2-द्वरीक समष्टि और $A_i (i \in N) : X \rightarrow Y$ हैं. यदि प्रतिचित्रण $S, T : X \rightarrow Y$ इस प्रकार हैं कि समस्त $x, y \in X$, समस्त $a \in Y, i, j \in N, i \neq j$ के लिए शर्तें (3.1) और (2.1) और

(3.2) $0(A_i; S, T, x_0)$ ऐसा है कि n के बहुत बड़ा होने की स्थिति में,

$$\text{उच्चक } \{d(y_p, y_q, a) \mid p \geq n, q \geq n, a \in Y\}$$

और प्रत्येक $n \in \mathbb{N}$ p, q समान पैरिटी के नहीं है.)

$$= \text{उच्चक } \{d(y_p, y_q, a) \mid p \geq n, q \geq n, a \in Y\} < \infty ;$$

तब प्रमेय 1 के निष्कर्ष (i) और (ii) निकलते हैं और $0(A_i; S, T, x_0)$

प्रतिचित्रणों S , T और A_i , $i \in N$ के संपात मान पर अभिरहित होता है. वास्तव में, यदि $y_n \rightarrow u$ तब X में z और z' इस प्रकार हैं कि

$$A_i z = Sz = u = A_i z' = Tz', \quad i \in N$$

और यदि $X = Y$ और प्रत्येक $i \in N$ के लिए

$$SA_i z = A_i Sz \quad \text{एवं} \quad TA_i z' = A_i Tz',$$

भी हो, तब,

(iii) A_i ($i \in N$), S और T का अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु होगा.

उपपत्ति. प्रमेय 1 तथा 3 की उपपत्तियों के आलोक में, यह सिद्ध करना पर्याप्त होगा कि $\{y_n\}$ एक कौशी अनुक्रम है. यह सिद्ध करने के लिए, मान लें

$$\delta_n = \text{उच्चक } \{d(y_p, y_q, a) \mid p \geq n, q \geq n, a \in Y\}.$$

तब प्रत्येक $n \in N$ के लिए δ_n परिमित है. क्योंकि किसी भी $n \in N$ के लिए $\delta_n \geq \delta_{n+1}$ इसलिए अनुक्रम $\{\delta_n\}$ किसी $\delta \geq 0$ पर अभिसरित होता है. मान लें कि $\delta > 0$ संभव है. यदि $p = 2m$ और $q = 2t+1$ लेने पर $p \geq n+1$ और $q \geq n+1$, तब

$$\begin{aligned}
d(y_p, y_q, a) &= d(A_{2t+1} \times_{2t}, A_{2m} \times_{2m-1}, a) \\
&\leq \emptyset \text{ (अधिकतम } \{d(y_{2t}, y_{2m-1}, a), d(y_{2t}, y_{2t+1}, a), \\
&\quad d(y_{2m-1}, y_{2m}, a), d(y_{2t}, y_{2m}, a), d(y_{2m-1}, y_{2t+1}, a)\}) \\
&\leq \emptyset \text{ (अधिकतम } \{ \delta_n, \delta_n, \delta_n, \delta_n, \delta_n \}),
\end{aligned}$$

अर्थात्

$$\delta_{n+1} \leq \emptyset (\delta_n).$$

इसलिए, \emptyset के उपरि सामिसांतत्य से, सीमांत मान लेने पर

$$\delta \leq \emptyset (\delta) < \delta,$$

जो एक विरोध है, अतः $\delta = 0$, और $\{y_n\}$ एक कौशी अनुक्रम है.

प्रमेय 1-4, बहुत सी, दूरीक तथा 2-दूरीक समष्टियों में संपाती और स्थिर बिंदु प्रमेयों का विस्तार, सुधार और व्यापकीकरण करती है. अब हम कुछ उपप्रमेय स्थापित करते हैं तथा कुछ संदर्भों का उल्लेख करते हैं.

उपप्रमेय 1. मान लें Y एक 2-दूरीक समष्टि और P, Q, S, T प्रतिचित्रण Y पर इस प्रकार हैं कि

$$d(y, y_p, y_q) = d(y, y_p, y_q) = d(y, y_p, y_q)$$

$$d(y, y_p, y_q) = d(y, y_p, y_q) = d(y, y_p, y_q)$$

$$d(y, y_p, y_q) = d(y, y_p, y_q) = d(y, y_p, y_q)$$

$$d(y, y_p, y_q) = d(y, y_p, y_q) = d(y, y_p, y_q)$$

सिद्ध

$$d(y, y_p, y_q) = d(y, y_p, y_q) = d(y, y_p, y_q)$$

यदि y एक बिंदु है जो y_p और y_q के बीच में है, तो $d(y, y_p, y_q) = d(y, y_p, y_q)$

$$d(y, y_p, y_q) = d(y, y_p, y_q) = d(y, y_p, y_q)$$

यदि y एक बिंदु है जो y_p और y_q के बीच में है, तो $d(y, y_p, y_q) = d(y, y_p, y_q)$

यदि y एक बिंदु है जो y_p और y_q के बीच में है, तो $d(y, y_p, y_q) = d(y, y_p, y_q)$

यदि y एक बिंदु है जो y_p और y_q के बीच में है, तो $d(y, y_p, y_q) = d(y, y_p, y_q)$

यदि y एक बिंदु है जो y_p और y_q के बीच में है, तो $d(y, y_p, y_q) = d(y, y_p, y_q)$

यदि y एक बिंदु है जो y_p और y_q के बीच में है, तो $d(y, y_p, y_q) = d(y, y_p, y_q)$

यदि y एक बिंदु है जो y_p और y_q के बीच में है, तो $d(y, y_p, y_q) = d(y, y_p, y_q)$

$$P(Y) \cup Q(Y) \subset S(Y) \cap T(Y).$$

यदि अचर $k \in (0, 1)$ इस प्रकार है कि

$$(C.1) \quad d(Px, Qy, a)$$

$$\leq k \text{ अधिकतम } \{d(Sx, Ty, a), d(Sx, Px, a),$$

$$d(Ty, Qy, a), \frac{1}{2}[d(Sx, Qy, a) + d(Ty, Px, a)]\}$$

समस्त $x, y, a \in Y$ के लिए, यदि

$$(C.2) \quad S(Y) \cap T(Y), Y \quad \text{का पूर्ण उपसमष्टि है, और}$$

$$(C.3) \quad PS = SP, QT = TQ$$

तब P, Q, S और T का अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु होगा.

$$\text{उपपत्ति. मान लें } \{A_i | i \in N\} = \{P, Q\} \quad \text{और } \emptyset(t) = kt.$$

तब प्रमेय 1 के निष्कर्षों (i) और (ii) के आलोक में $S(Y) \cap T(Y)$ में u और Y में z, z' ऐसे हैं कि

$$Pz = Sz = u = Qz' = Tz'.$$

$$(C.3) \quad \text{से,}$$

$$P(Y) = Q(Y) \cdot S(Y) \cdot T(Y)$$

यदि x, y, z को $(1, 0, 1)$ का मान है तो

$$(C.1) \quad Q(x, y, z) = 1$$

$$Q(x, y, z) = Q(x, y, z) \cdot S(x, y, z) \cdot T(x, y, z)$$

$$Q(x, y, z) = Q(x, y, z) \cdot S(x, y, z) \cdot T(x, y, z)$$

यदि x, y, z को $(1, 0, 1)$ का मान है तो

$$(C.2) \quad Q(x, y, z) = Q(x, y, z) \cdot S(x, y, z) \cdot T(x, y, z)$$

$$(C.3) \quad Q(x, y, z) = Q(x, y, z) \cdot S(x, y, z) \cdot T(x, y, z)$$

यदि x, y, z को $(1, 0, 1)$ का मान है तो

$$Q(x, y, z) = Q(x, y, z) \cdot S(x, y, z) \cdot T(x, y, z)$$

यदि x, y, z को $(1, 0, 1)$ का मान है तो

$$Q(x, y, z) = Q(x, y, z) \cdot S(x, y, z) \cdot T(x, y, z)$$

$$Q(x, y, z) = Q(x, y, z) \cdot S(x, y, z) \cdot T(x, y, z)$$

$$Su = SPz = PSz = Pu$$

और $Tu = TQz' = QTz' = Qu.$

(C.1) से

$$d(u, Qu, a) = d(Pz, Qu, a)$$

$$\leq kd(u, Qu, a),$$

फलस्वरूप $Qu = u$. इसी प्रकार $Pu = u$. P, Q, S , और T के उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु के रूप में u की अद्वितीयता सरलता से प्राप्त की जा सकती है.

उपप्रेम 2. मान लें Y एक 2-दूरीक समष्टि और P, Q, S, T प्रतिचित्रण Y पर इस प्रकार हैं कि Y के समस्त x, y, a और किसी अचर $k \in (0, 1)$ के लिए,

$$(C.4) \quad d(Px, Qy, a)$$

$$\leq k \text{ अधिकतम } \{d(Sx, Ty, a), d(Sx, Px, a),$$

$$d(Ty, Qy, a), d(Sx, Qy, a), d(Ty, Px, a)\},$$

$$(C.5) \quad Y \text{ में } x_0 \text{ ऐसा है कि } S(Y) \cap T(Y), (P, Q; S, T, x_0) -$$

कक्षकतः पूर्ण है, और

$$80 + 894 = 974 = 10$$

$$10 = 100 = 100 = 100$$

10

(1.1)

$$d(u, v) = d(v, u) = d(u, u) = 0$$

$$d(u, v) = d(v, u) = 0$$

$$d(u, v) = d(v, u) = d(u, u) = 0$$

$$d(u, v) = d(v, u) = d(u, u) = 0$$

$$d(u, v) = d(v, u) = d(u, u) = 0$$

$$d(u, v) = d(v, u) = d(u, u) = 0$$

$$d(u, v) = d(v, u) = d(u, u) = 0$$

(1.2)

$$d(u, v) = d(v, u) = d(u, u) = 0$$

$$d(u, v) = d(v, u) = d(u, u) = 0$$

$$d(u, v) = d(v, u) = d(u, u) = 0$$

(1.3)

$$d(u, v) = d(v, u) = d(u, u) = 0$$

$$d(u, v) = d(v, u) = d(u, u) = 0$$

$$(C.6) \quad PS = SP, \quad QT = TQ.$$

यदि शर्तों (3.2) और (3.2') में से कोई भी $\{A_i\} = \{P, Q\}$ के साथ संतुष्ट हो, तब P, Q, S, T का अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु होगा.

उपपत्ति. इस प्रकार परिभाषित करें कि $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\} = \{P, Q\}$ और $\theta(t) = kt$. तब प्रमेय 3-4 के आलोक में बिंदु u, z, z' ऐसे हैं कि

$$Pz = Sz = u = Qz' = Tz'.$$

उपपत्ति का शेषांश उपप्रमेय 1 की उपपत्ति का अनुसरण करके पूरा किया जा सकता है.

3. टिप्पणियां

1. उपप्रमेय 1 की उपपत्ति से यह स्पष्ट है कि क्रमविनिमेयता की शर्त (C.3) को काफी दुर्बल रूप में निम्न प्रकार लिखा जा सकता है :

$$(C.3') \quad PSy = SPy \quad \text{समस्त} \quad y \in C(PS)$$

के लिए, और

(C.6) $PS = SP, PT = ST$

और जो (3.2) और (3.3) में P के स्थान पर Q और R के स्थान पर S रखने पर हमें मिलेगा

अतः $PS = SP, PT = ST$ और $QT = QP, QP = PT$

और जो (3.2) और (3.3) में P के स्थान पर Q और R के स्थान पर S रखने पर हमें मिलेगा

$PS = SP = PT = ST$

अतः $PS = SP = PT = ST$ और $QT = QP = PT = ST$

3. सिद्ध करें

1. $PS = SP, PT = ST$ और $QT = QP, QP = PT$

(C.3) जो $PS = SP, PT = ST$ और $QT = QP, QP = PT$

(C.3.) $PS = SP, PT = ST$ और $QT = QP, QP = PT$

और जो

$QTy = TQy$ समस्त $y \in C(QT)$ के लिए, अर्थात् समुच्चय Y के समस्त बिंदुओं पर क्रमविनिमेयता की आवश्यकता नहीं है (देखें (C.3)). हमें केवल प्रतिचित्रणों (S, P) और (T, Q) के, उनके संपाती बिंदुओं पर क्रमविनिमेयता होने की आवश्यकता है. उपप्रमेय 2 की भी गणनाएँ इसी प्रकार हैं. वास्तव में, (C.6), (C.3') से भी विस्थापित की जा सकती है.

2. उपप्रमेय 1, Y को पूर्ण तथा S, T, d को संतत लेकर [60] में प्रकाशित हुई हैं. संकुचन शर्त (C.1), अधिक दृढ़ क्रमविनिमेयता तथा विभिन्न पुनरावृत्ति योजना के अधीन स्थिर बिंदु प्रमेय के लिए सिंह तथा राम [132] का अवलोकन करें.

3. उपप्रमेय 2, (3.2) अथवा (3.2') के अभाव में आवश्यक नहीं कि सत्य हो, यहाँ तक कि दूरीक समष्टि में भी सत्य होना आवश्यक नहीं है. प्रमेय 2 के बाद का उदाहरण अथवा शास्त्री और नायडू [97] देखें.

4. $X = Y, \{A_i | i \in N\} = \{P, Q\}$, दृढ़तर क्रमविनिमेयता की शर्त और विभिन्न पुनरावृत्ति योजना लेकर प्रमेय 4 जैसी स्थिर बिंदु प्रमेयों के लिए सिंह और नोरिस [129] ([122] का भी) अवलोकन करें.

5. सिंह [118] का मुख्य परिणाम $P=Q, Y$ पूर्ण और S, T, d संतत के लिए उपप्रमेय 1 है. सिंह और नारायण ([128] प्रमेय 3) की मुख्य स्थिर बिंदु प्रमेय उपप्रमेय 1 से $P = Q$ रखने पर प्राप्त होती है.

6. हैडजिक [36] का मुख्य परिणाम प्रमेय 1 के दूरीक सदृश की विशेष स्थिति है. वास्तव में, उन्होंने सिद्ध किया है कि $\{A_i | i \in N\}, S, T : M$

Y मान्यता प्राप्त करने के लिए (1010) के साथ $YOT = YTO$ संबंध है।
हमारे पास $((1, 0))$ है जो $(0, 1)$ के समान है।
हमारे पास $((2, 1))$ और $((1, 2))$ के समान है।
हमारे पास $((3, 2))$ और $((2, 3))$ के समान है।
हमारे पास $((4, 3))$ और $((3, 4))$ के समान है।

उदाहरण 1: मान लें कि Y का मान $0, 1, 2, 3, 4$ हो सके।
हमारे पास $((1, 0))$ है जो $(0, 1)$ के समान है।
हमारे पास $((2, 1))$ और $((1, 2))$ के समान है।
हमारे पास $((3, 2))$ और $((2, 3))$ के समान है।
हमारे पास $((4, 3))$ और $((3, 4))$ के समान है।

उदाहरण 2: मान लें कि Y का मान $0, 1, 2, 3, 4$ हो सके।
हमारे पास $((1, 0))$ है जो $(0, 1)$ के समान है।
हमारे पास $((2, 1))$ और $((1, 2))$ के समान है।
हमारे पास $((3, 2))$ और $((2, 3))$ के समान है।
हमारे पास $((4, 3))$ और $((3, 4))$ के समान है।

हमारे पास $((1, 0))$ है जो $(0, 1)$ के समान है।
हमारे पास $((2, 1))$ और $((1, 2))$ के समान है।
हमारे पास $((3, 2))$ और $((2, 3))$ के समान है।
हमारे पास $((4, 3))$ और $((3, 4))$ के समान है।

हमारे पास $((1, 0))$ है जो $(0, 1)$ के समान है।
हमारे पास $((2, 1))$ और $((1, 2))$ के समान है।
हमारे पास $((3, 2))$ और $((2, 3))$ के समान है।
हमारे पास $((4, 3))$ और $((3, 4))$ के समान है।

हमारे पास $((1, 0))$ है जो $(0, 1)$ के समान है।
हमारे पास $((2, 1))$ और $((1, 2))$ के समान है।
हमारे पास $((3, 2))$ और $((2, 3))$ के समान है।
हमारे पास $((4, 3))$ और $((3, 4))$ के समान है।

(एक पूर्ण दूरीक समष्टि) $\rightarrow M$ जो $A_i S = S A_i, A_i T = T A_i, A_i \in S(M) \cap T(M), i \in N$ और $d(A_i x, A_j y) \leq k d(Sx, Ty), x, y \in M, i, j \in N, i \neq j, k \in (0, 1)$ को संतुष्ट करते हैं उनका S और T के संतत होने पर एकमात्र उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु होगा.

7. [137], [138], [143] और [144] में प्रकाशित मुख्य संपाती प्रमेय, प्रमेय 1-4 की विशेष स्थितियों के रूप में प्राप्त की जा सकती है. जैसे वीरेन्द्र [143] की प्रमेय 1 और 2 क्रमशः प्रमेयों 4 और 2 से $\{A_i | i \in N\} = \{P, Q\}$ और $S = T$ लेकर प्राप्त होती है. 2-दूरीक समष्टि में मान वाले मनमाने समुच्चय पर प्रतिचित्रण युगल के लिए प्रथम संपाती प्रमेय प्रमेय 1, [137] प्रमेय 1 से $\{A_i | i \in N\} = \{P\}, S=T$ और $\phi(t) = kt, k \in (0, 1)$ के लिए प्राप्त की जा सकती है.

8. प्रमेय 4 के (संपाती भाग का) दूरीक सदृश में $\{A_i | i \in N\} = \{P\}$ लेकर सिंह और कुलश्रेष्ठ (प्रमेय 5, [125]) की कुछ उन्नत स्थिति प्राप्त होती है.

9. उपप्रमेय 1 में $P=Q$ और $S = T = Y$ पर तत्समक प्रतिचित्रण लेकर, बानाख संकुचन सिद्धांत को (2-दूरीक समष्टि पर) सम्मिलित किया गया है. वास्तव में, $P : Y \rightarrow Y$ को संकुचन कहते हैं, यदि, समस्त $x, y, a \in Y$ और $k \in (0, 1)$ के लिए

$$d(Px, Py, a) \leq k d(x, y, a)$$

इसे $P=Q$ और S, T तत्समक प्रतिचित्रण मानकर (C.1) में लिया गया है. जैसा

माना, $(AB)T(M)2A, AT-T_1A, AB = 2, A$ के M (उपरोक्त कट्टे के रूप में)

$(1, 0) \in A, (N, M) \in A, (M, 1) \in A, (1, M) \in A, (M, 1) \in A, (1, M) \in A$ और $(1, 0) \in A, (N, M) \in A, (M, 1) \in A, (1, M) \in A, (M, 1) \in A, (1, M) \in A$ और $(1, 0) \in A, (N, M) \in A, (M, 1) \in A, (1, M) \in A, (M, 1) \in A, (1, M) \in A$

यहाँ $(1, 0) \in A, (N, M) \in A, (M, 1) \in A, (1, M) \in A, (M, 1) \in A, (1, M) \in A$ और $(1, 0) \in A, (N, M) \in A, (M, 1) \in A, (1, M) \in A, (M, 1) \in A, (1, M) \in A$ और $(1, 0) \in A, (N, M) \in A, (M, 1) \in A, (1, M) \in A, (M, 1) \in A, (1, M) \in A$

$(1, 0) \in A, (N, M) \in A, (M, 1) \in A, (1, M) \in A, (M, 1) \in A, (1, M) \in A$ और $(1, 0) \in A, (N, M) \in A, (M, 1) \in A, (1, M) \in A, (M, 1) \in A, (1, M) \in A$

यहाँ $(1, 0) \in A, (N, M) \in A, (M, 1) \in A, (1, M) \in A, (M, 1) \in A, (1, M) \in A$ और $(1, 0) \in A, (N, M) \in A, (M, 1) \in A, (1, M) \in A, (M, 1) \in A, (1, M) \in A$

यहाँ $(1, 0) \in A, (N, M) \in A, (M, 1) \in A, (1, M) \in A, (M, 1) \in A, (1, M) \in A$ और $(1, 0) \in A, (N, M) \in A, (M, 1) \in A, (1, M) \in A, (M, 1) \in A, (1, M) \in A$

कि सुविदित है कि यदि P एक 2-दूरीक समष्टि पर संकुचन है तो P का अद्वितीय स्थिर बिंदु होगा.

10. प्रमेय 1 (iii) का, $X = Y$, S अथवा T संतत और $A_i (i \in \mathbb{N})$ को S और T के साथ पूरे समष्टि पर दुर्बल क्रमविनिमयी लेकर प्राप्त परिणाम का दूरीक तुल्य रूप सेसा (एट.एल.)(प्रमेय 3,[104]) है.

11. $X = Y$, S और T संतत और $SPx=PSx$, $QTx=TQx$ समष्टि Y के प्रत्येक x के लिए लेकर मिज़को और पाल्जेवस्की [65] ने शर्त (C.4) प्रयुक्त करके हाल ही में स्थिर बिंदु प्रमेय प्राप्त की है.

12. इस अध्याय के मुख्य परिणाम, यहाँ तक कि 1-दूरीक समष्टि में मान वाले प्रतिचित्रणों के लिए भी नये हैं (टिप्पणी 6 और 10 भी देखें). वास्तव में, प्रमेय 1 - 6 के परिणाम 1-दूरीक समष्टि में मान रखने वाले प्रतिचित्रणों हेतु अनेक संपाती प्रमेयों तथा 1-दूरीक समष्टि पर क्रमविनिमयी, अक्रमविनिमयी व दुर्बल क्रमविनिमयी प्रतिचित्रणों हेतु ढेर सारे स्थिर बिंदु प्रमेयों को विस्तारित, एकीकृत एवं व्यापकीकृत करते हैं (उदाहरणार्थ [36], [44], [45], [60], [64], [97], [102], [104], [122], [125] और [130] तथा विस्तृत सन्दर्भ हेतु रोअड्स [96] को देखें).

4. अनुप्रयोग

इस अनुभाग में गुणन समष्टियों पर समीकरणों के साधन हेतु कुछ परिणाम दिये जायेंगे. वस्तुतः यदि Y एक 2-दूरीक समष्टि हो तथा $S, T : Y \times Y \rightarrow Y$ तो स्थिर बिंदु प्रमेयों का प्रयोग करते हुए हम उन परिस्थितियों का अन्वेषण करने जा रहे हैं जिनमें समीकरण

$$S(x, x) = x = T(x, x)$$

का एक अद्वितीय साधन प्राप्त किया जा सकेगा.

प्रमेय 5. मान लें Y एक 2-दूरीक समष्टि और $P, Q : Y \times Y \rightarrow Y$ हैं. यदि प्रतिचित्रण $S, T : Y \times Y \rightarrow Y$ इस प्रकार हैं कि

(5.1) प्रत्येक $y \in Y$ के लिए

$$P(Y \times \{y\}) \cup Q(Y \times \{y\}) \subset S(Y \times \{y\}) \cap T(Y \times \{y\})$$

(5.2) Y के समस्त x, y, x', y', a और H में किसी \emptyset के लिए

$$d(P(x, y), Q(x', y'), a)$$

$$\leq \emptyset(\text{अधिकतम } \{d(S(x, y), T(x', y')), a\},$$

परिचय . ५

परिचय यह है कि यह एक विज्ञान है जो कि हमारे जीवन में बहुत ही महत्वपूर्ण है।

यह एक विज्ञान है जो कि हमारे जीवन में बहुत ही महत्वपूर्ण है। यह एक विज्ञान है जो कि हमारे जीवन में बहुत ही महत्वपूर्ण है। यह एक विज्ञान है जो कि हमारे जीवन में बहुत ही महत्वपूर्ण है।

$$(x, x)T = x = (x, x)S$$

यह एक विज्ञान है जो कि हमारे जीवन में बहुत ही महत्वपूर्ण है।

यह एक विज्ञान है जो कि हमारे जीवन में बहुत ही महत्वपूर्ण है।

यह एक विज्ञान है जो कि हमारे जीवन में बहुत ही महत्वपूर्ण है।

$$(2.1) \quad \text{यह एक विज्ञान है जो कि हमारे जीवन में बहुत ही महत्वपूर्ण है।}$$

$$(1.1) \quad \text{यह एक विज्ञान है जो कि हमारे जीवन में बहुत ही महत्वपूर्ण है।}$$

$$(2.2) \quad \text{यह एक विज्ञान है जो कि हमारे जीवन में बहुत ही महत्वपूर्ण है।}$$

यह

$$(1.2) \quad \text{यह एक विज्ञान है जो कि हमारे जीवन में बहुत ही महत्वपूर्ण है।}$$

$$(1.3) \quad \text{यह एक विज्ञान है जो कि हमारे जीवन में बहुत ही महत्वपूर्ण है।}$$

$$d(T(x', y'), Q(x', y'), a),$$

$$\frac{1}{2}[d(S(x, y), Q(x', y'), a)$$

$$+ d(T(x', y'), P(x, y), a)]])$$

(5.3) प्रत्येक $y \in Y$ के लिए

$S(Y \times \{y\}) \cap T(Y \times \{y\})$, Y का पूर्ण उपसमष्टि है, और

(5.4) समस्त $x, y \in C(PS)$ के लिए

$P(S(x, y), y) = S(P(x, y), y)$ और समस्त $x, y \in C(Q, T)$

के लिए $Q(T(x, y), y) = T(Q(x, y), y)$;

तब ठीक एक बिन्दु b इस प्रकार है कि समस्त $y \in Y$ के लिए,

$$P(b, y) = Q(b, y) = S(b, y) = T(b, y) = b.$$

उपपत्ति. Y में निश्चित y और y' के लिए असमिका (5.2)

के संगत शर्त (1.1) और $\{A_i \mid i \in N\} = \{P, Q\}, X=Y$ है. इसके अतिरिक्त,

Y में नियत y के लिए, (5.4) के अनुसार (P, S) और (Q, T) अपने संपाती

बिंदु पर क्रमविनिमयी प्रतिचित्रण युगल है. इसलिए, प्रमेय 1(iii) के आलोक में,

$$d(T(x'), y'), O(x'), y'), a)$$

$$p(d(s(x, y), O(x, y'), a)$$

$$+ d(T(x'), y'), E(x, y), a))$$

प्रमाण $y \in Y$ के लिए

(2.3)

$$s(yx(y)) \cap T(yx(y)) = Y \text{ का उपसमूह है और}$$

माना $x, y \in C(p)$ के लिए

(2.4)

$$p(s(x, y), y) = s(p(x, y), y) \text{ और माना } x, y \in C(p)$$

$$\text{के लिए } O(T(x, y), y) = T(O(x, y), y)$$

हम ठीक एक ही p का मान है जो $p(x, y) = p(y, x)$ के लिए

$$p(p, y) = p(y, p) = p(p, y) = p(y, p) = p(p, y) = p(y, p)$$

उदाहरण: $p = \{ \text{माना } y \text{ और } x \text{ के लिए माना } (2.3)$

के लिए माना (1.1) माना (1.1) माना (1.1) माना (1.1) माना (1.1)

y के लिए माना y के लिए माना y के लिए माना y के लिए माना y

माना y के लिए माना y के लिए माना y के लिए माना y

Y के प्रत्येक y के लिए Y में एक और केवल एक $x(y)$ ऐसा होगा कि

$$P(x(y), y) = Q(x(y), y) = S(x(y), y) = T(x(y), y) = x(y).$$

Y के प्रत्येक y, y' के लिए, (5.2) से हम

$$d(x(y), x(y'), a) = d(P(x(y), y), Q(x(y'), y'), a)$$

$$\leq \emptyset(d(x(y), x(y'), a))$$

प्राप्त करते हैं. और फलस्वरूप, क्योंकि a मनमाना है, $x(y) = x(y')$. अतः

$x(\cdot)$, Y में कोई अचर b है. इस प्रकार प्रमेय की उपपत्ति पूर्ण होती है.

यह प्रमेय [32], [44], [128] और [135], [137], [138]

और [143] के संगत परिणामों का विस्तार, सुधार और व्यपकीकरण करती है. उदाहरण

के लिए [प्र. 2, 135] का कुछ सुधरा हुआ रूप प्रमेय 5 में $P=Q$, $S=T$ और

$\emptyset(t) = kt, k \in (0, 1)$ लेकर प्राप्त होता है.

निम्न प्रमेय आईसेकी [45] और सिंह [115] के परिणामों का विस्तार करती है.

प्रमेय 6. मान लें Y एक पूर्ण 2-दूरीक समष्टि, और P, Q, S, T प्रतिचित्रण Y पर इस प्रकार है कि शर्तें (5. 1), (5.3), (5.4) संतुष्ट होती हैं, और

$$(6.1) \quad d(P(x, y), Q(x', y'), a)$$

$$\leq k \text{ अधिकतम } \{d(S(x, y), P(x, y), a),$$

$$d(T(x', y'), Q(x', y'), a), d(y, y', a)\}$$

Y के समस्त अवयवों x, y, x', y', a और $k \in (0, 1)$ के लिए,

तब Y में ठीक एक बिन्दु b इस प्रकार होगा कि

$$P(b, b) = Q(b, b) = S(b, b) = T(b, b) = b$$

उपपत्ति. उपपत्ति के लिए प्रमेय 5 की तकनीक का अनुसरण करते हुए और उपप्रमेय 1 का प्रयोग करने पर, यह देखा जा सकता है कि Y के प्रत्येक y के लिए Y में ठीक एक $x(y)$ इस प्रकार होगा कि

$$(6.2) \quad P(x(y), y) = Q(x(y), y) = S(x(y), y)$$

$$= T(x(y), y) = x(y).$$

किसी $y, y', a \in Y$ के लिए, (6.1) और (6.2) से

$$d(x(y), x(y'), a) = d(P(x(y), y), Q(x(y'), y'), a)$$

$$(6.1) \quad d(p(x, y), q(x, y)) = d(p(x, y), q(x, y))$$

$$d(p(x, y), q(x, y)) = d(p(x, y), q(x, y))$$

$$(6.2) \quad d(p(x, y), q(x, y)) = d(p(x, y), q(x, y))$$

$$d(p(x, y), q(x, y)) = d(p(x, y), q(x, y))$$

$$d(p(x, y), q(x, y)) = d(p(x, y), q(x, y))$$

$$d(p(x, y), q(x, y)) = d(p(x, y), q(x, y))$$

$$d(p(x, y), q(x, y)) = d(p(x, y), q(x, y))$$

$$(6.3) \quad d(p(x, y), q(x, y)) = d(p(x, y), q(x, y))$$

$$d(p(x, y), q(x, y)) = d(p(x, y), q(x, y))$$

$$d(p(x, y), q(x, y)) = d(p(x, y), q(x, y))$$

$$d(p(x, y), q(x, y)) = d(p(x, y), q(x, y))$$

$$\leq kd(y, y', a).$$

इस प्रकार $x(.)$ पूर्ण Y पर एक संकुचन है और बानाख संकुचन सिद्धांत से (देखें टिप्पणी 9), Y में अद्वितीय बिंदु b इस प्रकार होगा कि $x(b) = b$. इसलिए (6.2) से,

$$P(b, b) = Q(b, b) = S(b, b) = T(b, b) = b.$$

5. हसियाओं के निष्कर्ष पर टिप्पणी

हाल ही में चिह - रू हसियाओं (Chih - Ru Hsiao) [38] ने 2-दूरीक समष्टि में मान वाले संकुचित प्रकार के प्रतिचित्रणों हेतु स्थिर बिंदु प्रमेयों की उपपत्ति में एक विशेष प्रकार की तकनीक पाये जाने का उल्लेख किया है. उनके द्वारा जिन प्रतिचित्रणों पर विचार किया गया है ([38] में प्रमेय 1- 2 व टिप्पणी 3 देखें) $\bigwedge_{i \in \mathbb{N}} X_i = Y$, $A_i | i \in \mathbb{N} = \{P\}$ या $\{P, Q\}$ एवं $S=T=$ (Y पर तत्समक प्रतिचित्रण) मानने पर प्रतिचित्रण शर्त (3.1) से अधिक व्यापक नहीं है. उन्होंने यह पाया कि 2-दूरीक समष्टि Y में संकुचनीय प्रकार का प्रतिचित्रण P पिकार्ड के पुनरावर्तकों के अनुक्रम $\{x_n | x_n = Px_{n-1}, n = 1, 2, \dots\}$ के लिए निम्न शर्त को संतुष्ट करता है:

(H)

समस्त $i, j, q \in \mathbb{N}$ तथा समस्त $x_0 \in Y$ के लिए

$d(x_i, x_j, x_q) = 0$. यदि, समस्त $x_0 \in Y$ के लिए व प्रतिचित्रणों P, Q के लिए पुनरावर्तकों का अनुक्रम

$$\{x_n | x_{2n+1} = Px_{2n}, x_{2n+2} = Qx_{2n+1}, n = 0, 1, 2, \dots\}$$

H को संतुष्ट करें तब यह कहा जाता है कि P और Q सर्वनिष्ठ गुणधर्म (H) रखते हैं (देखें [38]). उनके अनुसार, यदि $(Y, d) = (R^2, A)$ जहाँ $A(x, y, z)$ उस त्रिभुज का क्षेत्रफल जो R^2 के बिंदुओं x, y, z को मिलाने से बनता है, तब संकुचनीय प्रतिचित्रण P के पुनरावर्तक निश्चय ही एक सरल रेखा पर होंगे. वे यह अनुभव करते हैं कि इस परिघटना में प्रतिचित्रण तुच्छ हो जाता है, और फलस्वरूप 2-दूरीक समष्टि के गुणों का पुनर्सूत्रण किया जाना चाहिये ताकि इस तरह की परिघटना से बचा जा सके. ऐसा सोचना समीचीन नहीं है क्योंकि 2-दूरीक समष्टि की परिकल्पना केवल स्थिर बिंदु प्रमेयों के लिए नहीं की गई थी.

हमारे स्थिर बिंदु प्रमेयों में चार प्रतिचित्रणों के लिए पारिभाषित (प्रमेय 1 - 4 देखें) पुनरावर्तकों का अनुक्रम पिकार्ड के पुनरावर्तकों के अनुक्रम से भिन्न है. कम से कम तब तक जब तक S अथवा T तत्समक प्रतिचित्रण नहीं है. हालांकि प्रमेय 3 की उपपत्ति के लिए निश्चयात्मक कथन 3 गुणधर्म (H) से संबंधित है. अधिक महत्वपूर्ण बात यह है कि गुण धर्म (H) को संतुष्ट करता हुआ प्रतिचित्रण युगल $P, Q: Y \rightarrow Y$ आवश्यक नहीं कि हसियाओं के अर्थ में तुच्छ हो. हम एक 2-दूरीक समष्टि और हसियाओं द्वारा प्रदत्त उदाहरण में से एक प्रतिचित्रण लेकर इसे स्पष्ट करते हैं.

उदाहरण 2. मान लें $Y = [\frac{1}{2}, 1]^2$ और $d(x, y, z)$ उस त्रिभुज का क्षेत्रफल है जो बिन्दुओं $x, y, z \in Y$ को मिलाने से बनता है. प्रतिचित्रण $P, Q: Y \rightarrow Y$ इस प्रकार है कि

$$P((a, b)) = (a^{\frac{1}{2}}, b^{\frac{1}{2}})$$

$$\text{और } Q((a, b)) = \begin{cases} (a^2, b^2) & \text{यदि } a^2 \geq \frac{1}{2}, b^2 \geq \frac{1}{2}. \\ (a^2, b) & \text{यदि } a^2 \geq \frac{1}{2}, b^2 \leq \frac{1}{2}, \\ (a, b) & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

हसियाओं ने यह दर्शाया है कि P अतुच्छ प्रतिचित्रण है. मान लें

$$x_0 = (a, b), \quad \frac{1}{2} \leq a, b \leq 1$$

$$\text{तब } x_1 = Px_0 = (a^{\frac{1}{2}}, b^{\frac{1}{2}})$$

$$x_2 = Qx_1 = (a, b) = x_0 \quad \text{आदि.}$$

इस प्रकार यहाँ $\{x_n\} = \{x_1, x_0, x_1, x_0, \dots\}$. स्पष्टतया P, Q सर्वनिष्ठ गुणधर्म (H) को संतुष्ट करते हैं. प्रतिचित्रण Q के लिए पिकार्ड अनुवर्तकों के अनुक्रम $\{z_n\}$ पर विचार करें तो,

$$z_0 = ((3^{1/4}/2^{1/2}), (2/3)^{1/4})$$

$$\text{तब } z_1 = Qz_0 = ((3^{1/2}/2), (2/3)^{1/2}),$$

$$z_2 = Qz_1 = (3/4, 2/3).$$

$$P(a, b) = (a^2, b^2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_2, b_2) \text{ for } a_2 > a_1, b_2 > b_1 \\ (a_2, b) \text{ for } a_2 > a_1, b_2 \leq b_1 \\ (a, b) \text{ for } a_2 \leq a_1, b_2 \leq b_1 \end{array} \right\} \text{ और } Q(a, b) = 0$$

होता है कि P अनुसूचित है। इससे

$$x_0 = (a, b), \quad a < b, \quad a < 1$$

$$x_1 = Px_0 = (a^2, b^2)$$

$$x_2 = Qx_1 = (a, b) = x_0$$

इस प्रकार $(x_n) = (x_1, x_0, x_1, x_0, \dots)$ । चूंकि P, Q अनुसूचित हैं, (ii) की श्रृंखला कसती है। चूंकि 0 के लिए P अनुसूचित है, इसलिए (x_n) पर निम्नलिखित बातें

$$x_0 = (13/14, 1/2), \quad x_1 = (13/14, 1/2)$$

$$x_1 = Qx_0 = (13/14, 1/2), \quad x_2 = (13/14, 1/2)$$

$$z_3 = Qz_2 = (9/16, 2/3),$$

और $d(z_1, z_2, z_3) \neq 0$ अतः Q गुणधर्म (H) को संतुष्ट नहीं करता. इस प्रकार प्रतिचित्रण Q भी हसियाओं के अर्थों में अतुच्छ है.

यह उल्लेख करना संदर्भ से परे नहीं होगा कि प्रमेयों 2-4 में हमें केवल प्रारंभिक बिंदु x_0 के लिए अनुक्रम $\{y_n\}$ के अस्तित्व की आवश्यकता है, जबकि अनुक्रम $\{x_n\}$ को किसी प्रारंभिक बिंदु x_0 (अर्थात् समष्टि के प्रत्येक x_0) के लिए प्राप्त हो सकने वाले पिकार्ड अनुवर्तकों से संबंधित गुणधर्म (H) को संतुष्ट करना पड़ेगा.

तृ ती य अ ध्या य

उपगामी क्रमविनिमयी प्रतिचित्रणों हेतु

2-दूरीक समष्टि में स्थिर बिंदु प्रमेय

इस अध्याय में एक 2-दूरीक समष्टि में दो प्रतिचित्रणों की उपगामी क्रमविनिमेयता पारिभाषित की गई है तथा 2-दूरीक समष्टि (X, d) पर तीन तथा चार स्व-प्रतिचित्रणों के लिए विभिन्न प्रतिचित्रण शर्तों के अधीन स्थिर बिंदु प्रमेय स्थापित किये गये हैं । यह अध्याय निम्न अनुभागों में विभक्त है-

1. प्रारम्भिकी
2. तीन प्रतिचित्रणों हेतु स्थिर बिंदु प्रमेय
3. चार प्रतिचित्रणों हेतु स्थिर बिंदु प्रमेय

पृष्ठ संख्या

पृष्ठ संख्या १००
पृष्ठ संख्या १००

पृष्ठ संख्या १०० पृष्ठ संख्या १०० पृष्ठ संख्या १००
पृष्ठ संख्या १०० पृष्ठ संख्या १०० पृष्ठ संख्या १००
पृष्ठ संख्या १०० पृष्ठ संख्या १०० पृष्ठ संख्या १००
पृष्ठ संख्या १०० पृष्ठ संख्या १०० पृष्ठ संख्या १००

पृष्ठ संख्या	१
पृष्ठ संख्या	२
पृष्ठ संख्या	३

1. प्रारंभिकी

मान लें (M, d) एक दूरीक समष्टि है (अर्थात् (M, d) एक 1 - दूरीक समष्टि है) और T समष्टि M पर प्रतिचित्रण है. 1974 में किरिक [6] ने निम्न स्थिर बिंदु प्रमेय स्थापित किया :

प्रमेय 1. यदि T कक्षकतः संतत हो, समष्टि M कक्षकतः पूर्ण दूरीक हो तथा समष्टि M के सभी x, y के लिए शर्त

$$(1.1) \text{ न्यूनतम } \{ d(Tx, Ty), d(x, Tx), d(y, Ty) \}$$

$$\text{-न्यूनतम } \{ d(x, Ty), d(y, Tx) \}$$

$$\leq pd(x, y), \quad 0 < p < 1$$

संतुष्ट हो तो M में एक ऐसे बिंदु z का अस्तित्व प्राप्त होता है कि $Tz = z$.

इस प्रमेय का व्यापकीकरण एवं विस्तारण अनेक गणितज्ञों द्वारा हुआ है, यथा-आईसेकी [42], पाचपट्टे [76], मिश्रा [67], लाल एवं दास [61], नारायण, थपलियाल एवं वीरेन्द्र [73], सिंह एवं आईसेकी [121] चो [9] - [10], धागे [20], तन्मय सोम [140], पाठक [83], अरगिरस [4]. धागे [20] ने निम्न प्रमेय सिद्ध किया और यह दिखाया कि इस प्रमेय (प्रमेय 2) से सुज्ञात बानाख संकुचन सिद्धांत एवं कानन का स्थिर बिंदु प्रमेय (देखें [20], [53] व [90]) प्राप्त किये जा सकते हैं.

वस्तुतः धागे ने प्रमेय [1] का व्यापकीकरण निम्न रूप में प्रस्तुत किया.

प्रमेय 2. यदि T कक्षकतः संतत हो, समष्टि M कक्षकतः पूर्ण दूरीक हो तथा समष्टि M के सभी x, y के लिए शर्त

$$(2.1) \quad \text{न्यूनतम } \{d(Tx, Ty), d(x, Tx), d(y, Ty)\}$$

$$+ a \text{ न्यूनतम } \{d(x, Ty), d(y, Tx)\}$$

$$\leq pd(x, y) + qd(x, Tx)$$

संतुष्ट हो जहाँ a, p और q ऐसी वास्तविक संख्याएँ हैं कि $0 < p+q < 1$, तो M में एक ऐसे बिंदु z का अस्तित्व प्राप्त होता है कि $Tz = z$.

टिप्पणी. उल्लेख्य है कि प्रमेयों 1-2 में स्थिर बिंदु का अद्वितीय होना आवश्यक नहीं हैं, परन्तु यदि प्रमेय 2 में a, p व q धनात्मक नियतांक हो और $a > p$ हो तो प्रतिचित्रण T का स्थिर बिंदु अद्वितीय होगा. स्पष्ट है कि यदि प्रमेय 2 में $a=-1$ व $q = 0$ लें तो हम किरिक की प्रमेय 1 प्राप्त कर सकते हैं.

इस अध्याय में उक्त दो प्रमेयों को आधार मानते हुए तथा आईसेकी [42], लाल एवं दास [61], सिंह एवं आईसेकी [121], मिश्रा [87] तथा अरगिरस [4] के 2-दूरीक में स्थापित किये गये संगत परिणामों से प्रेरणा प्राप्त करते हुए हम 2-दूरीक पर तीन व चार प्रतिचित्रणों के उभयनिष्ठ स्थिर बिंदुओं के अस्तित्व का अध्ययन करेंगे.

माना जाय कि α एक प्राकृतिक संख्या है।

माना S एक T समकालीन समष्टि है।

माना x, y दो अलग-अलग तत्व हैं।

$$(1.5) \quad (xT, y) \leq (xT, x) + (xT, y)$$

$$+ (xT, y) \leq (xT, x) + (xT, y)$$

$$(xT, x) + (xT, y) \leq (xT, x) + (xT, y)$$

माना p, q दो प्राकृतिक संख्याएँ हैं।

$$0 < p+q < 1, \text{ जहाँ } p, q \text{ दो प्राकृतिक संख्याएँ हैं।}$$

$$T = S$$

माना T एक प्राकृतिक संख्या है।

माना S एक प्राकृतिक संख्या है।

माना T एक प्राकृतिक संख्या है।

$$0 = p$$

माना S एक प्राकृतिक संख्या है।

माना T एक प्राकृतिक संख्या है।

माना S एक प्राकृतिक संख्या है।

माना T एक प्राकृतिक संख्या है।

2. तीन प्रतिचित्रणों हेतु स्थिर बिंदु प्रमेय

हाल ही में सिंह एवं तिवारी [132] ने दूरीक समष्टि में उपगामी क्रमविनिमयी प्रतिचित्रण पारिभाषित किया व इस प्रकार के प्रतिचित्रणों के लिए कुछ स्थिर बिंदु प्रमेय प्रतिपादित किये. इस अनुभाग में हम प्रतिचित्रणों की इस संकल्पना को 2-दूरीक समष्टि में पारिभाषित करके (देखें परिभाषाएँ) तीन प्रतिचित्रणों के संपाती एवं स्थिर बिंदुओं के अस्तित्व संबंधी दो परिणाम (प्रमेय 3 - 4) दे रहे हैं. इसमें प्रयुक्त प्रतिचित्रण-शर्त अपने अनुरूप कई अन्य शर्तों से अधिक व्यापक हैं ; उदाहरणार्थ देखें चो [10] , किरिक [14] , धागे [20] , आईसेकी [42] , लाल-दास [61] एवं सिंह-आईसेकी [121] .

परिभाषा 1. दूरीक समष्टि (M, d) पर स्व-प्रतिचित्रणों P व T को दुर्बल क्रमविनिमयी (सेसा [103]) कहा जाता है यदि M के प्रत्येक x के लिए

$$d(PTx, TPx) \leq d(Px, Tx)$$

स्पष्टतया, X पर क्रमविनिमयी प्रतिचित्रण युगल दुर्बल क्रमविनिमयी भी होंगे परंतु, इसके विलोम का सत्य होना आवश्यक नहीं है. यह निम्न उदाहरण से प्रदर्शित होता है.

उदाहरण 1. (सेसा [103]), मान लें $X = [0, 1]$ तथा दूरीक यूक्लिडीयन है. स्व-प्रतिचित्रण P तथा T समष्टि X के प्रत्येक x तथा $a > 1$ के लिए निम्न प्रकार पारिभाषित हैं -

$$Px = x/(2a + x), \quad Tx = x/a$$

दिए गए फलन $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{if } x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{if } x > 1 \end{cases}$ को देखते हुए $f(x)$ का $x=1$ पर अवकलन ज्ञात करें।
 हल: $f(x)$ का $x=1$ पर अवकलन ज्ञात करने के लिए हम $f'(x)$ का $x=1$ पर मान ज्ञात करेंगे।
 $f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{if } x \leq 1 \\ 2 & \text{if } x > 1 \end{cases}$
 $f'(1) = 2(1) + 2 = 4$
 अतः $f(x)$ का $x=1$ पर अवकलन 4 है।

1. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{if } x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{if } x > 1 \end{cases}$ को देखते हुए $f(x)$ का $x=1$ पर अवकलन ज्ञात करें।

$$(x^2 + 2x + 1) \text{ if } x \leq 1, (2x - 1) \text{ if } x > 1$$

हल: $f(x)$ का $x=1$ पर अवकलन ज्ञात करने के लिए हम $f'(x)$ का $x=1$ पर मान ज्ञात करेंगे।
 $f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{if } x \leq 1 \\ 2 & \text{if } x > 1 \end{cases}$
 $f'(1) = 2(1) + 2 = 4$
 अतः $f(x)$ का $x=1$ पर अवकलन 4 है।

2. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{if } x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{if } x > 1 \end{cases}$ को देखते हुए $f(x)$ का $x=1$ पर अवकलन ज्ञात करें।

इससे स्पष्ट है कि P तथा T दुर्बल क्रमविनिमयी हैं परन्तु क्रमविनिमयी नहीं हैं.

परिभाषा 2 [132] . दूरीक समष्टि (M, d) पर स्व-प्रतिचित्रणों P व T को उपगामी क्रमविनिमयी अथवा u - उपगामी क्रमविनिमयी (जिसे युंक [50] द्वारा सुसंगत भी कहा जाता है) कहा जायेगा यदि और केवल यदि

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(Px_n, Tx_n) = 0$$

जबकि X में $\{x_n\}$ इस प्रकार का अनुक्रम है कि x के किसी बिंदु u के लिए

$$(*) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Px_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = u.$$

स्पष्टतया, क्रमविनिमयी तथा शर्त $(*)$ को संतुष्ट करने वाले दुर्बल-क्रमविनिमयी प्रतिचित्रण युगल [102] उपगामी क्रमविनिमयी होंगे तथा निम्न उदाहरण प्रदर्शित करता है कि इसके विलोम का सत्य होना आवश्यक नहीं.

उदाहरण 2. माना कि $M = [0, \infty)$, $Px = 2x^2$, $Tx = 3x^2$ तथा M पर d निरपेक्ष मान दूरीक हैं. तब

$$d(Px, Tx) = x^4$$

एवं

$$d(Tx, Px) = x^2$$

हमारे पास है कि p का T गुण गुणवत्ता है T का p गुण गुणवत्ता है।

प्रमाण 2. (132) (M, μ) एक (M, μ) का (M, μ) गुण गुणवत्ता है।

p का T गुण गुणवत्ता है p का T गुण गुणवत्ता है p का T गुण गुणवत्ता है।

(130) (M, μ) का (M, μ) गुण गुणवत्ता है (M, μ) का (M, μ) गुण गुणवत्ता है।

$$0 = (p \times T, p \times T) \text{ गुण गुणवत्ता है}$$

हमारे पास है (x) का p गुण गुणवत्ता है (x) का p गुण गुणवत्ता है (x) का p गुण गुणवत्ता है।

प्रमाण

$$(*) \text{ गुण गुणवत्ता है } p \times T = T \times p$$

प्रमाण 2. हमारे पास है $(*)$ का p गुण गुणवत्ता है $(*)$ का p गुण गुणवत्ता है $(*)$ का p गुण गुणवत्ता है।

प्रमाण 2. (130) (M, μ) का (M, μ) गुण गुणवत्ता है (M, μ) का (M, μ) गुण गुणवत्ता है।

हमारे पास है (M, μ) का (M, μ) गुण गुणवत्ता है (M, μ) का (M, μ) गुण गुणवत्ता है।

$$p \times T = T \times p \text{ गुण गुणवत्ता है } p \times T = T \times p$$

हमारे पास है p का T गुण गुणवत्ता है p का T गुण गुणवत्ता है p का T गुण गुणवत्ता है।

$$p \times T = T \times p \text{ गुण गुणवत्ता है}$$

प्रमाण

$$p \times T = T \times p \text{ गुण गुणवत्ता है}$$

इस प्रकार M के सभी बिंदुओं x के लिए

$$d(PTx, TPx) \not\leq d(Tx, Px).$$

अस्तु P व T दुर्बल क्रमविनिमयी प्रतिचित्रण नहीं हैं, किंतु यदि $x_n = 2^{-n}$ तब

$$Px_n \rightarrow 0, Tx_n \rightarrow 0, d(PTx_n, TPx_n) \rightarrow 0,$$

और P व T u - उपगामी क्रमविनिमयी प्रतिचित्रण हैं, जहाँ $u = 0$.

प्रपत्रों [42], [102] व [121] में यह दावा किया गया है कि सुसंगत अथवा उपगामी क्रमविनिमयी प्रतिचित्रण युगल $\{P, T\}$ दुर्बल क्रमविनिमयी होंगे, किंतु हाल ही में प्रोफेसर एस०एल०सिंह (हरिद्वार) ने 'मैथेमेटिकल रिव्यूज' (देखें M R 89 h : 5 4 0 3 0 अथवा नीचे उदाहरण 3) के लिए प्रोफेसर युंक के प्रपत्र का रिव्यू लिखते समय एक उदाहरण देते हुए यह टिप्पणी किया है कि दूरीक समष्टि में दुर्बल क्रमविनिमयी प्रतिचित्रण युगल आवश्यक नहीं कि उपक्रमविनिमेयता (अथवा सुसंगतता) की शर्त को संतुष्ट करने के लिए समष्टि में किसी अनुक्रम $\{x_n\}$ का अस्तित्व हो ही. सेसा [102] ने दूरीक समष्टि के प्रतिचित्रणों f एवं g को दुर्बल क्रमविनिमयी पारिभाषित किया यदि M के सभी x के लिए

$$d(fgx, gfx) \leq d(fx, gx).$$

उदाहरण 3. मान लें $M = [1, \infty)$, $d =$ निरपेक्ष मान दूरीक, तथा $f, g: M \rightarrow M$ जहाँ $fx = 1+x$ व $gx = 1 + 2x$. स्पष्टतः

प्रतीक x के लिए M के साथ N के साथ

$$Q(Px, Tx) \quad \& \quad Q(Tx, Px).$$

प्रतीक x के लिए M के साथ N के साथ

$$x_n = \frac{1}{n}$$

$$Px_n + 0, Tx_n + 0, Q(Px_n, Tx_n) + 0,$$

प्रतीक x के लिए M के साथ N के साथ

प्रतीक x के लिए M के साथ N के साथ

प्रतीक x के लिए M के साथ N के साथ

प्रतीक x के लिए M के साथ N के साथ

प्रतीक x के लिए M के साथ N के साथ

प्रतीक x के लिए M के साथ N के साथ

प्रतीक x के लिए M के साथ N के साथ

प्रतीक x के लिए M के साथ N के साथ

प्रतीक x के लिए M के साथ N के साथ

प्रतीक x के लिए M के साथ N के साथ

$$Q(Px, Tx) \quad \& \quad Q(Tx, Px).$$

प्रतीक x के लिए M के साथ N के साथ

$$x_n = \frac{1}{n}$$

$$d(fgx, gfx) = 1 \leq x = d(fx, gx).$$

अस्तु, f एवं g दुर्बल क्रमविनिमयी हैं, किंतु समष्टि M में किसी भी ऐसे अनुक्रम $\{x_n\}$ का अस्तित्व नहीं मिलता जिसके लिए f व g सुसंगत प्रतिचित्रण हो सकें.

परिभाषा 3. माना P तथा T किसी 2-दूरीक समष्टि (X, d) पर स्व-प्रतिचित्रण हैं. तब P और T को X पर उपगामी क्रमविनिमयी (अथवा u -उपगामी क्रमविनिमयी) कहा जायेगा यदि और केवल यदि X के प्रत्येक a के लिए

$$\text{सीमा } Px_n = \text{सीमा } Tx_n = u.$$

इस अनुभाग का प्रथम परिणाम निम्नवत् है -

प्रमेय 3. माना कि (X, d) एक 2-दूरीक समष्टि है, जिसमें d संतत है, मान लो P, Q, T समष्टि X पर स्व-प्रतिचित्रण हैं. यदि वास्तविक संख्याएँ k, p, q इस प्रकार हों कि $0 < p + q < 1$ तथा X के सभी x, y, a के लिए

$$(3.1) \text{ न्यूनतम } \{ d(Px, Qy, a), d(Tx, Px, a), d(Ty, Qy, a) \}$$

$$+ k \text{ न्यूनतम } \{ d(Tx, Qy, a), d(Ty, Px, a) \}$$

$$\leq pd(Tx, Ty, a) + qd(Tx, Px, a);$$

$$(b) \quad (x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$$

अतः $(x^2 + 1)^2$ का अवकलन $2x(x^2 + 1)$ है।
 अतः $(x^2 + 1)^2$ का अवकलन $2x(x^2 + 1)$ है।

(b) $(x^2 + 1)^2$ का अवकलन $2x(x^2 + 1)$ है।
 अतः $(x^2 + 1)^2$ का अवकलन $2x(x^2 + 1)$ है।

$$(b) \quad (x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$$

अतः $(x^2 + 1)^2$ का अवकलन $2x(x^2 + 1)$ है।

अतः $(x^2 + 1)^2$ का अवकलन $2x(x^2 + 1)$ है।
 अतः $(x^2 + 1)^2$ का अवकलन $2x(x^2 + 1)$ है।

$$(3.1) \quad (x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$$

$$(b) \quad (x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$$

$$(b) \quad (x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$$

(3.2) समष्टि X के किसी बिंदु x_0 के लिए X में एक अनुक्रम $\{x_n\}$ इस प्रकार हो कि

$$Tx_{2n+1} = Px_{2n}, \quad Tx_{2n+2} = Qx_{2n+1},$$

$$Tx_{n+1} \neq Tx_{n+2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

(3.3) अनुक्रम $\{Tx_n\}$ का कोई एक उपानुक्रम X के किसी बिंदु z पर अभिसरित होता हो ;

(3.4) प्रतिचित्रण P, Q, T बिंदु z पर संतत हों ;

(3.5) युगल $\{T, P\}$ तथा $\{T, Q\}$ z -उपगामी क्रम विनिमयी हों.

तब z प्रतिचित्रणों P, Q, T का संपाती बिंदु होगा अर्थात् $Pz = Qz = Tz$.

पुनः यदि $(p/k) \in (0, 1)$ तब z प्रतिचित्रणों P, Q, T का अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु होगा.

उपपत्ति. शर्त (3.1) में $x = x_{2n}$ तथा $y = x_{2n+1}$ रखने पर,

$$\text{न्यूनतम } \{ d(Tx_{2n+1}, Tx_{2n+2}, a), d(Tx_{2n}, Tx_{2n+1}, a),$$

$$d(Tx_{2n+1}, Tx_{2n+2}, a) \}$$

(3.2) माना x एक वेक्टर है, तो x के घटक x_1, x_2, \dots, x_n के लिए $(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ है।

प्रमाण: माना $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ।

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{और} \quad x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

(3.3) माना x एक वेक्टर है, तो x के घटक x_1, x_2, \dots, x_n के लिए $(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ है।

प्रमाण: माना $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ।

(3.4) माना P, Q, T वेक्टर हैं, तो $(P, Q) = (Q, P)$ है।

(3.5) माना (P, T) और (Q, T) वेक्टर हैं, तो $(P, T) = (T, P)$ और $(Q, T) = (T, Q)$ है।

माना $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ और $T = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ ।

तब $(P, T) = p_1 t_1 + p_2 t_2 + \dots + p_n t_n$ और $(T, P) = t_1 p_1 + t_2 p_2 + \dots + t_n p_n$ ।

इसलिए $(P, T) = (T, P)$ ।

(3.6) माना x एक वेक्टर है, तो $(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ है।

प्रमाण: माना $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ।

$$(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

$$(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

$$+ k \text{ न्यूनतम } \{d(Tx_{2n}, Tx_{2n+2}, a), d(Tx_{2n+1}, Tx_{2n+1}, a)\} .$$

$$\leq pd(Tx_{2n}, Tx_{2n+1}, a) + qd(Tx_{2n}, Tx_{2n+1}, a)$$

अथवा

$$\text{न्यूनतम } \{d(Tx_{2n+1}, Tx_{2n+2}, a), d(Tx_{2n}, Tx_{2n+1}, a)\}$$

$$\leq (p + q) d(Tx_{2n}, Tx_{2n+1}, a)$$

क्योंकि d के एक 2-दूरीक होने के कारण

$$d(Tx_{2n}, Tx_{2n+1}, a) = 0$$

सदैव सत्य नहीं हो सकता, इसलिए

$$d(Tx_{2n+1}, Tx_{2n+2}, a) \leq (p+q)d(Tx_{2n}, Tx_{2n+1}, a)$$

इसी प्रकार (3.1) में $x = x_{2n+1}$ तथा $y = x_{2n+2}$ रखने पर ,

$$d(Tx_{2n+2}, Tx_{2n+3}, a) \leq (p+q) d(Tx_{2n+1}, Tx_{2n+2}, a) ,$$

अस्तु, x_n के सभी a तथा $n = 1, 2, 3, \dots$ के लिए

$$d(Tx_{n+1}, Tx_{n+2}, a) \leq k'd(Tx_n, Tx_{n+1}, a),$$

जहाँ $k' = p+q$. प्रमेयिका 1 [115, पृ.2] के आलोक में $\{Tx_n\}$ एक

कोशी अनुक्रम है. अतः (3.3) के कारण, $Tx_n \rightarrow z$, $Px_{2n} \rightarrow z$ एवं

$Qx_{2n+1} \rightarrow z$ तथा (3.4) में प्रदत्त सांतत्य शर्त के अनुसार $PTx_{n_i} \rightarrow Pz$

तथा $TPx_{n_i} \rightarrow Tz$ जहाँ $\{n_i\}$ अनुक्रम $\{n\}$ का एक उपानुक्रम है. चूँकि P तथा T उपगामी क्रमविनिमयी प्रतिचित्रण हैं, इसलिए X के प्रत्येक a के लिए

$$\text{सीमा } d(PTx_{n_i}, TPx_{n_i}, a) = 0$$

अतः X के प्रत्येक a के लिए d की संततता के कारण

$$d(Pz, Tz, a) = 0$$

अस्तु $Pz = Tz$ इसी प्रकार $Qz = Tz$.

अब (3.1) में $x = x_{2n}$ तथा $y = z$ रखने व सीमांत मान लेने पर

$$d(z, Tz, a) \leq (p/k) d(z, Tz, a).$$

परिणामतः $Tz = z$. इस प्रकार बिंदु z प्रतिचित्रणों P, Q, T का उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु है. यह सिद्ध करना आसान है कि z अद्वितीय स्थिर बिंदु है.

विशेष. धागे [20] ने $P = Q$ तथा $T = I$ (तत्समक प्रतिचित्रण) के साथ प्रतिचित्रण शर्त (3.1) का अध्ययन दूरीक समष्टि में किया है. पुनः $v = 0$ एवं $T = I$ के साथ शर्त (3.1) के अन्तर्गत चो [10] द्वारा स्थिर बिंदु प्रमेय प्रकाशित हुए हैं. यदि हम प्रमेय 3 में $v = 0$ लें तो सिंह - आईसेकी [121] में मुख्य प्रमेय का एक व्यापकीकरण प्रमेय 3 से प्राप्त होता है.

अब मान लें कि (X, d) एक 2-दूरीक समष्टि है, $A, P, Q, S, T : X \rightarrow X$

माना $TPX_{n1} + Tz$ जहाँ $(n1)$ माना (n) का एक उपसमूह है
P मान T उपसमूहों के लिए मान है जहाँ X के मान a के लिए

$$\text{माना } d(Pz, Tz, TPX_{n1}, TPX_{n1}, a) = 0$$

माना a के लिए d की अवस्था के मान

$$d(Pz, Tz, a) = 0$$

$$\text{अतः } Pz = Tz \text{ जहाँ } Qz = Tz$$

$$\text{अतः (3.1) में } x = x_{2n} \text{ जहाँ } y = z \text{ जहाँ } z \text{ माना जा रहा है}$$

$$d(z, Tz, a) \in (x \setminus y) \Rightarrow d(x, Tz, z)$$

परिणतः $Tz = z$ जहाँ माना जा रहा है P, Q, T का उपसमूह
माना जा रहा है $Tz = z$ जहाँ माना जा रहा है

निर्देश. माना (3.1) में $P = Q$ जहाँ $T = 1$ के लिए माना जा रहा है
जहाँ माना जा रहा है (3.1) में माना जा रहा है $P = Q$ जहाँ $T = 1$ के लिए माना जा रहा है
 $T = 1$ के लिए माना जा रहा है (3.1) में माना जा रहा है $P = Q$ जहाँ $T = 1$ के लिए माना जा रहा है
माना जा रहा है (3.1) में माना जा रहा है $P = Q$ जहाँ $T = 1$ के लिए माना जा रहा है
माना जा रहा है (3.1) में माना जा रहा है $P = Q$ जहाँ $T = 1$ के लिए माना जा रहा है

$$x = x : Tz, Qz, Pz \text{ जहाँ } (x) \text{ की है मान } Pz$$

तथा k, p, q वास्तविक संख्याएँ हैं, जबकि $0 < p+q < 1$.

समष्टि X के सभी अवयवों x, y, a के लिए शर्त (3.1) के अंतर्गत स्थापित प्रमेय वस्तुतः पर्याप्त व्यापक हैं. उल्लेख्य हैं कि प्रतिचित्रण शर्त (3.1) को [10], धागे [20] एवं सिंह - आईसेकी [121] द्वारा सिद्ध किये गये प्रमेयों में प्रयुक्त प्रतिचित्रण शर्तों से अधिक व्यापक है. इस भाग में प्रतिचित्रण शर्त (4.1) (देखें प्रमेय 4) के अंतर्गत तीन प्रतिचित्रणों A, S, T के संपाती एवं स्थिर बिंदुओं के अस्तित्व हेतु एक प्रमेय प्रतिपादित करेंगे. इस प्रमेय के प्रकथन (देखें शर्त (3.3)) में मानी हुई अनुक्रम $\{Ax_n\}$ को प्रथम बार फिशर [24] ने पारिभाषित किया था. उल्लेख्य है कि यदि $A(X) \subset S(X) \cap T(X)$ तब X के प्रत्येक x_0 के लिए अनुक्रमों $\{x_n\}$ एवं $\{Ax_n\}$ का निश्चय ही अस्तित्व होगा.

प्रमेय 4. माना कि (X, d) एक 2-दूरीक समष्टि है, जिसमें d संतत है. मान लो A, S, T समष्टि X पर स्व-प्रतिचित्रण है. यदि वास्तविक संख्याएँ k, p, q इस प्रकार हों कि $0 < p + q < 1$ तथा X के सभी अवयवों x, y, a के लिए

$$(4.1) \text{ न्यूनतम } \{d(Ax, Ay, a), d(Sx, Ax, a), d(Ty, Ay, a)\}$$

$$+ k \text{ न्यूनतम } \{d(Sx, Ay, a), d(Ty, Ax, a)\}$$

$$\leq pd(Sx, Ty, a) + qd(Sx, Ax, a);$$

$$(4.2) \text{ समष्टि } X \text{ के किसी बिन्दु } x_0 \text{ के लिए } X \text{ में एक अनुक्रम } \{x_n\}$$

इस प्रकार हो कि

$$Sx_{2n+1} = Ax_{2n}, \quad Tx_{2n+2} = Ax_{2n+1},$$

$$Ax_{n+1} \neq Ax_{n+2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

(4.3) अनुक्रम $\{Ax_n\}$ का कोई एक उपानुक्रम x के किसी बिन्दु z पर अभिसरित होता हो ;

(4.4) प्रतिचित्रण A, S, T बिन्दु z पर संतत हों;

(4.5) युगल $\{A, S\}$ तथा $\{A, T\}$ z -उपगामी क्रमविनिमयी हों;

तब z प्रतिचित्रणों A, S, T का संपाती बिंदु होगा अर्थात् $Az = Sz = Tz$.
पुनः, यदि $0 < (p/k) < 1$ तब z प्रतिचित्रणों A, S, T का अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु होता है.

उपपत्ति. असमिका (4.1) में $x = x_{2n}$ तथा $y = x_{2n+1}$ रखने पर

$$\text{न्यूनतम} \{d(Ax_{2n}, Ax_{2n+1}, a), d(Ax_{2n-1}, Ax_{2n}, a), d(Ax_{2n}, Ax_{2n+1}, a)\}$$

$$+ k \text{न्यूनतम} \{d(Ax_{2n-1}, Ax_{2n+1}, a), d(Ax_{2n}, Ax_{2n}, a)\}$$

$$\leq p d(Ax_{2n-1}, Ax_{2n}, a) + q d(Ax_{2n-1}, Ax_{2n}, a)$$

$$2x_{2n+1} = Ax_{2n} + x_{2n+1}, \quad 2x_{2n+1} = Ax_{2n} + x_{2n+1}$$

$$x_{2n+1} = Ax_{2n} + x_{2n+1}, \quad x_{2n+1} = Ax_{2n} + x_{2n+1}$$

$$(A.3) \quad \text{माना } (Ax)_n \text{ का मान } x \text{ है, तब } (Ax)_n = x$$

$$(A.4) \quad \text{माना } A, S, T \text{ का मान } x \text{ है, तब } (A, S, T) = x$$

$$(A.5) \quad \text{माना } (A, S) \text{ का मान } (A, T) \text{ है, तब } (A, S) = (A, T)$$

$$x \text{ का मान } A, S, T \text{ का मान } x \text{ है, तब } x = Ax - x$$

$$x \text{ का मान } A, S, T \text{ का मान } x \text{ है, तब } x = (x/k) > 0$$

$$x \text{ का मान } x \text{ है, तब } x = x$$

$$x \text{ का मान } x \text{ है, तब } x = x$$

$$x \text{ का मान } x \text{ है, तब } x = x$$

$$x \text{ का मान } x \text{ है, तब } x = x$$

$$x \text{ का मान } x \text{ है, तब } x = x$$

$$x \text{ का मान } x \text{ है, तब } x = x$$

न्यूनतम $\{ d(Ax_{2n}, Ax_{2n+1}, a), d(Ax_{2n-1}, Ax_{2n}, a) \}$

$$\leq (p+q) d(Ax_{2n-1}, Ax_{2n}, a)$$

चूँकि d के एक 2-दूरीक होने के कारण

$$d(Ax_{2n}, Ax_{2n-1}, a) = 0$$

सदैव सत्य नहीं हो सकता, इसलिए

$$d(Ax_{2n+1}, Ax_{2n}, a) \leq (p+q) d(Ax_{2n}, Ax_{2n-1}, a).$$

इसी प्रकार, (4.1) में $x = x_{2n+1}$ तथा $y = x_{2n+2}$ रखने पर,

$$d(Ax_{2n+2}, Ax_{2n+1}, a) \leq (p+q) d(Ax_{2n+1}, Ax_{2n}, a).$$

अस्तु X के सभी a तथा $n = 1, 2, 3, \dots$ के लिए

$$d(Ax_{n+1}, Ax_{n+2}, a) \leq k' d(Ax_n, Ax_{n+1}, a),$$

जहाँ $k' = p+q$. प्रमेयिका 1 [115, पृ.2] के आलोक $\{Ax_n\}$ एक कोशी अनुक्रम है. अतः (4.3) से,

$$Ax_n \rightarrow z, \quad Sx_{2n+1} \rightarrow z, \quad Tx_{2n+2} \rightarrow z.$$

इसलिए (4.4) में प्रदत्त सांतत्य शर्त के अनुसार

$$ATx_{n_i} \rightarrow Az \quad \text{तथा} \quad TAx_{n_i} \rightarrow Tz$$

माना $B = (b_{ij})$ $n \times n$ का आव्यूह है, $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ $1 \leq i \leq n$ के लिए $a_i B = 0$ है।

$$a_i (b_{i1} + b_{i2} + \dots + b_{in}) = 0 \quad (1)$$

इस प्रकार B का प्रत्येक स्तंभ शून्य है।

$$B = (b_{ij}) \quad n \times n \quad \text{माना}$$

माना B का प्रत्येक स्तंभ शून्य है।

$$B = (b_{ij}) \quad n \times n \quad \text{माना}$$

माना B का प्रत्येक स्तंभ शून्य है।

$$B = (b_{ij}) \quad n \times n \quad \text{माना}$$

माना B का प्रत्येक स्तंभ शून्य है।

$$B = (b_{ij}) \quad n \times n \quad \text{माना}$$

माना B का प्रत्येक स्तंभ शून्य है।

माना B का प्रत्येक स्तंभ शून्य है।

$$B = (b_{ij}) \quad n \times n \quad \text{माना}$$

माना B का प्रत्येक स्तंभ शून्य है।

$$B = (b_{ij}) \quad n \times n \quad \text{माना}$$

जहाँ $\{n_i\}$ अनुक्रम $\{n\}$ का एक उपानुक्रम है. चूँकि A तथा T z -उपगामी क्रमविनिमयी प्रतिचित्रण हैं, इसलिए X के प्रत्येक अवयव a के लिए

$$\text{सीमा } d(ATx_{n_i}, TAx_{n_i}, a) = 0$$

चूँकि d संतत है, अतः X के प्रत्येक a के लिए,

$$d(Az, Tz, a) = 0$$

अस्तु

$$Az = Tz.$$

इसी प्रकार

$$Az = Sz.$$

अब (4.1) में $x = x_{2n}$ तथा $y = z$ रखने व सीमांत मान लेने पर

$$d(z, Az, a) \leq (p/k) d(z, Az, a).$$

परिणामतः $Az = z$. इस प्रकार बिंदु z प्रतिचित्रणों A, S, T का उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु है. यह सिद्ध करना आसान है कि z अद्वितीय स्थिर बिंदु है.

यदि A एक $n \times n$ आव्यूह है, तो A का व्युत्क्रम A^{-1} है।
 यदि A एक $n \times n$ आव्यूह है, तो A का व्युत्क्रम A^{-1} है।

$$B = (B_{10} KAT, B_{1n} XTA) B$$

यदि A एक $n \times n$ आव्यूह है, तो A का व्युत्क्रम A^{-1} है।

$$B = (B_{10} XT, B_{1n} SA) B$$

यदि

$$XT = SA$$

यदि

$$XT = SA$$

यदि A एक $n \times n$ आव्यूह है, तो A का व्युत्क्रम A^{-1} है।

$$(A, SA, SA) > (A, SA, SA)$$

यदि A एक $n \times n$ आव्यूह है, तो A का व्युत्क्रम A^{-1} है।

यदि A एक $n \times n$ आव्यूह है, तो A का व्युत्क्रम A^{-1} है।

3. चार प्रतिचित्रणों हेतु स्थिर बिंदु प्रमेय

मान लें कि (X, d) एक 2-दूरीक समष्टि है, $P, Q, S, T : X \rightarrow X$ तथा k, p वास्तविक संख्याएँ हैं.

इस अनुभाग का प्रमुख परिणाम निम्नवत् है.

प्रमेय 5. मान लें (X, d) एक 2-दूरीक समष्टि है जिसमें d संतत है. मान लें P, Q, S, T समष्टि X पर स्व-प्रतिचित्रण हैं. यदि वास्तविक संख्याएँ k, p इस प्रकार हों कि $0 < p < 1$, $0 < (p/(k+1)) < 1$ तथा X के सभी x, y, a के लिए

$$(5.1) \quad d(Px, Qy, a)$$

$$+k \text{ न्यूनतम } \{ d(Px, Ty, a), d(Qy, Sx, a) \}$$

$$\leq pd(Sx, Ty, a);$$

(5.2) समष्टि X के किसी बिंदु x_0 के लिए X में अनुक्रम $\{x_n\}$ व $\{y_n\}$ इस प्रकार हों कि

$$Px_{2n} = Tx_{2n+1} = y_{2n+1}, \quad Qx_{2n+1} = Sx_{2n+2} = y_{2n+2}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots;$$

3. एक निम्नलिखित प्रश्न हल करें

मान लें कि (X, Y) एक द्वि-चरित्र है, जहाँ $X, Y \in \mathbb{R}^n$ और $X \cdot X = T, Y \cdot Y = S$

तब $X \cdot Y$ का मान ज्ञात करें

हल: मान लें $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ और $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

तो $X \cdot X = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = T$ और $Y \cdot Y = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 = S$

अब $X \cdot Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$ का मान ज्ञात करें

हल: $X \cdot Y = \frac{1}{2} [(X+Y) \cdot (X+Y) - X \cdot X - Y \cdot Y]$

मान लें $Z = X + Y$ तो $Z \cdot Z = (X+Y) \cdot (X+Y)$

(2.1) $Z \cdot Z = X \cdot X + Y \cdot Y + 2X \cdot Y$

अतः $2X \cdot Y = Z \cdot Z - X \cdot X - Y \cdot Y$

इससे $X \cdot Y = \frac{1}{2} (Z \cdot Z - T - S)$

(2.2) यदि X और Y के बीच कोण θ है तो $X \cdot Y = |X| |Y| \cos \theta$

इससे $\cos \theta = \frac{X \cdot Y}{|X| |Y|}$

$\cos \theta = \frac{1}{2} \left(\frac{Z \cdot Z}{T S} - \frac{T}{T S} - \frac{S}{T S} \right)$

(5.3) अनुक्रम $\{Tx_n\}$ तथा $\{Sx_n\}$ के कोई उपानुक्रम X के किसी बिंदु z पर अभिसरित होते हों ;

(5.4) प्रतिचित्रण P, Q, S, T बिंदु z पर संतत हों ;

(5.5) युगल $\{P, S\}$ एवं $\{Q, T\}$ z -उपगामी क्रमानिमयी हों ;

तब z प्रतिचित्रणों P, Q, S, T का एक अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु है.

उपपत्ति. शर्त (5.1) में $x = x_{2n}$ तथा $y = x_{2n+1}$ रखने पर,

$$\begin{aligned} & d(Tx_{2n+1}, Sx_{2n+2}, a) \\ & + k \text{ न्यूनतम } \{d(Tx_{2n+1}, Tx_{2n+1}, a), d(Sx_{2n+2}, Sx_{2n}, a)\} \\ & \leq pd(Sx_{2n}, Tx_{2n+1}, a). \end{aligned}$$

अस्तु

$$d(y_{2n+1}, y_{2n+2}, a) \leq pd(y_{2n}, y_{2n+1}, a).$$

(2.3) माना (T_n) एक (S_n) का एक अनुक्रम है।

तो निम्नलिखित सिद्ध है :

(2.4) माना p, q, r, s पूर्णांक हैं।

(2.5) माना (p, q) एक (r, s) का एक अनुक्रम है।

तो निम्नलिखित सिद्ध है : माना p, q, r, s पूर्णांक हैं।

है।

माना (a, b) एक (c, d) का एक अनुक्रम है।

तो निम्नलिखित सिद्ध है।

+ माना (a, b) एक (c, d) का एक अनुक्रम है।

+ माना (a, b) एक (c, d) का एक अनुक्रम है।

है।

माना (a, b) एक (c, d) का एक अनुक्रम है।

इसी प्रकार (5.1) में $y = x_{2n+1}$, $x = x_{2n+2}$

रखने पर

$$d(Tx_{2n+3}, Sx_{2n+2}, a)$$

$$+k \text{ न्यूनतम } \{d(Tx_{2n+3}, Tx_{2n+1}, a), d(Sx_{2n+2}, Sx_{2n+2}, a)\}$$

$$\leq pd(Sx_{2n+2}, Tx_{2n+1}, a),$$

और इससे

$$d(y_{2n+2}, y_{2n+3}, a) \leq pd(y_{2n+1}, y_{2n+2}, a).$$

अतः x के सभी a तथा $n = 1, 2, 3, \dots$ के लिए

$$d(y_{n+2}, y_{n+1}, a) \leq pd(y_{n+1}, y_n, a).$$

अतः अनुक्रम $\{y_n\}$ अर्थात्

$$\{Tx_1, Sx_2, Tx_3, Sx_4, \dots, Sx_{2n}, Tx_{2n+1}, \dots\}$$

एक कौशी अनुक्रम है, इसलिए (5.3) के आलोक में n को अनंत लेने पर

$$Px_{2n} = Tx_{2n+1} + z, \quad Qx_{2n+1} = Sx_{2n+2} + z.$$

परंतु $PPx_{2n} + Pz$ तथा चूंकि युगल (P, S) z' -उपगामी क्रमविनिमयी हैं,

प्रमाण

समस्या (2.1) में $Y = X^{2n+1}$, $X = X^{2n+1}$

$$d(Tx^{2n+3}, X^{2n+5}, a)$$

$$d(Tx^{2n+3}, X^{2n+5}, a) \leq d(Tx^{2n+3}, X^{2n+5}, a) + d(X^{2n+5}, X^{2n+5}, a)$$

$$\leq pd(X^{2n+5}, X^{2n+5}, a)$$

अतः

$$d(Y^{2n+5}, Y^{2n+3}, a) \leq pd(Y^{2n+3}, Y^{2n+5}, a)$$

अतः X के सभी a के लिए $n = 1, 2, 3, \dots$ के लिए

$$d(Y^{n+5}, Y^{n+3}, a) \leq pd(Y^{n+3}, Y^{n+5}, a)$$

अतः Y में Y के लिए

$$(Tx^1, X^2, X^3, X^4, X^5, X^6, X^7, X^8, X^9, X^{10}, \dots)$$

एक श्रृंखला है, जहाँ d (2.1) के अनुसार n के लिए

$$Tx^{2n} \rightarrow X^{2n+1} \rightarrow X^{2n+2} \rightarrow X^{2n+3} \rightarrow X^{2n+4} \rightarrow X^{2n+5} \rightarrow \dots$$

x के प्रत्येक a के लिए

$$d(SP_{2n}, PS_{2n}, a) \rightarrow 0.$$

शर्त (5.1) में $x = Px_{2n}$ तथा $y = x_{2n+1}$ रखने पर

$$\begin{aligned} & d(PP_{2n}, Qx_{2n+1}, a) \\ & + k \text{ न्यूनतम } \{d(PP_{2n}, Tx_{2n+1}, a), d(Qx_{2n+1}, SP_{2n}, a)\} \\ & \leq pd(SP_{2n}, Tx_{2n+1}, a) \end{aligned}$$

इसका सीमांत मान लेने पर

$$\begin{aligned} & d(Pz, z, a) \\ & + k \text{ न्यूनतम } \{d(Pz, z, a), d(z, Pz, a)\} \\ & \leq pd(Pz, z, a) \end{aligned}$$

अर्थात्

$$d(Pz, z, a) \leq (p/(1+k)) d(Pz, z, a).$$

चूँकि $0 < (p/(1+k)) < 1$, x के प्रत्येक a के लिए,

x के प्रत्येक a के लिए

$$d(8px_{2n}, 8x_{2n+1}, a) = 0.$$

$$\text{है (a) } x = px_{2n} \quad \text{है } x = x_{2n+1} \quad \text{है (a)}$$

$$d(8px_{2n}, 8x_{2n+1}, a)$$

$$+ k \text{ द्वारा } (d(8px_{2n}, 8x_{2n+1}, a), d(8x_{2n+1}, 8px_{2n}, a))$$

$$< d(8px_{2n}, 8x_{2n+1}, a)$$

माना कि a और b

$$d(x, a, a)$$

$$+ k \text{ द्वारा } (d(x, a, a), d(x, a, a))$$

$$< d(x, a, a)$$

माना

$$d(x, a, a) = d(x, a, a)$$

$$d(Pz, z, a) = 0.$$

अतः

$$Pz = z$$

इसी प्रकार $x = Sx_{2n}$ तथा $y = x_{2n+1}$ शर्त (5.1) में रखने पर

$$d(PSx_{2n}, Qx_{2n+1}, a)$$

$$+ \text{कन्यूनतम} \{ d(PSx_{2n}, Tx_{2n+1}, a), d(Qx_{2n+1}, SSx_{2n}, a) \}$$

$$\leq pd(SSx_{2n}, Tx_{2n+1}, a).$$

इसका सीमांत मान लेने पर

$$d(Sz, z, a)$$

$$+ \text{कन्यूनतम} \{ d(Sz, z, a), d(z, Sz, a) \}$$

$$\leq pd(Sz, z, a)$$

इससे $Sz = z$ प्राप्त होता है.

इसी प्रकार

यह सिद्ध करना आसान है कि P, Q, S, T का z अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु है.

प्रमेय 6. मान लें कि (X, d) एक 2-दूरीक समष्टि है जिसमें d संतत है. मान लो P, Q, S, T समष्टि X पर संतत स्व-प्रतिचित्रण हैं. यदि वास्तविक संख्याएँ k, p इस प्रकार हों कि $0 < p < 1, 0 < (p/(k+1)) < 1$ तथा X के सभी x, y, a के लिए (1.1) एवं निम्न संतुष्ट होते हैं:

$$(6.1) \quad P(X) \subset T(X) \text{ एवं } Q(X) \subset S(X);$$

$$(6.2) \quad \text{समष्टि } X \text{ पूर्ण है};$$

$$(6.3) \quad \text{प्रतिचित्रण युगल } \{P, S\} \text{ एवं } \{Q, T\} \text{ उपगामी क्रमविनिमयी हैं};$$

तब P, Q, S व T के लिए X में एक अद्वितीय स्थिर बिंदु का अस्तित्व है.

उपपत्ति. चूंकि शर्त (6.1) के कारण (5.2) में पारिभाषित अनुक्रम $\{y_n\}$ का अस्तित्व होता है तथा (6.2) के कारण शर्त (5.3) पूर्ण होती है, इसलिए प्रमेय 5 से उपपत्ति पूर्ण हो जाती है.

टिप्पणी 1. प्रमेय 5 - 6 के शर्तों (5.5) व (6.3) में उपगामी क्रमविनिमेयता को दुर्बल क्रमविनिमेयता से प्रतिस्थापित किया जा सकता है. यही कथन आगामी प्रमेयो 7 - 8 के लिए भी सत्य है.

टिप्पणी 2. नारायण, थपलियाल व वीरेन्द्र [73] ने हाल ही में निम्न

उपपक्ष 1. माना है कि $P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z$ के अक्षरों से

उपपक्ष 2. माना है कि $P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z$ के अक्षरों से

उपपक्ष 3. माना है कि $P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z$ के अक्षरों से

उपपक्ष 4. माना है कि $P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z$ के अक्षरों से

उपपक्ष 5. माना है कि $P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z$ के अक्षरों से

उपपक्ष 6. माना है कि $P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z$ के अक्षरों से

(0.1) $P (X) C - T (X) O - Q (X) C - R (X) H$

(0.2) $P (X) C - T (X) O - Q (X) C - R (X) H$

(0.3) $P (X) C - T (X) O - Q (X) C - R (X) H$

उपपक्ष 7. माना है कि $P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z$ के अक्षरों से

उपपक्ष 8. माना है कि $P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z$ के अक्षरों से

उपपक्ष 9. माना है कि $P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z$ के अक्षरों से

उपपक्ष 10. माना है कि $P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z$ के अक्षरों से

उपपक्ष 11. माना है कि $P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z$ के अक्षरों से

उपपक्ष 12. माना है कि $P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z$ के अक्षरों से

उपपक्ष 13. माना है कि $P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z$ के अक्षरों से

उपपक्ष 14. माना है कि $P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z$ के अक्षरों से

शर्त (देखें (* * *) नीचे) के अधीन कुछ परिणाम दिये हैं, किन्तु उनके द्वारा प्रयुक्त पुनरावृत्ति प्रक्रम यहां प्रयुक्त पुनरावृत्ति प्रक्रम (देखें प्रमेय 5 का (5.2)) से भिन्न है. कदाचित् इस भिन्नता के कारण उन्हें [73] हमारे परिणामों में प्रयुक्त कुछ शर्तों (यथा (5.4) व (5.5)) से अधिक कठोर शर्तों प्रयोग करनी पड़ी हैं. उनके द्वारा प्रयुक्त मुख्य शर्त इस प्रकार है -

प्रतिचित्रण $P, Q, S, T : X \rightarrow X$ के लिए

$$(\text{***}) \quad \text{न्यूनतम } \{d(Px, Qy, a), d(Px, Sx, a), d(Qy, Ty, a)\}$$

$$+ k \text{ न्यूनतम } \{d(Px, Ty, a), d(Qx, Sx, a)\}$$

$$\leq pd(Sx, Ty, a)$$

$$\text{जहाँ } x, y, a, \in X, \quad p, (p/k) \in (0, 1)$$

प्रमेय 7. मान लें (X, d) एक 2-दूरीक समष्टि है जिसमें d संतत है. मान लें P, Q, S, T समष्टि X पर स्व-प्रतिचित्रण ऐसे हैं कि शर्तें (5.2) - (5.5) संतुष्ट होती हैं. यदि वास्तविक संख्याओं k, p के लिए $0 < (p/k) < 1, 0 < p < (1/2)$ तथा X के सभी भिन्न x, y, a के लिए

$$(7.1) \quad \text{न्यूनतम } [d(Px, Qy, a), (1/2)\{d(Px, Sx, a)$$

$$+ d(Qy, Ty, a)\}]$$

$$+ k \text{न्यूनतम} \{ d(Px, Ty, a), d(Qy, Sx, a) \}$$

$$\leq pd(Sx, Ty, a)$$

हो तब z प्रतिचित्रणों P, Q, S, T का एक अद्वितीयस्थिर बिंदु है.

उपपत्ति. शर्त (7.1) में $x = x_{2n}$ तथा $y = x_{2n+1}$ रखने

पर

$$\text{न्यूनतम} [d(Tx_{2n+1}, Sx_{2n+2}, a), (\frac{1}{2})\{d(Tx_{2n+1}, Sx_{2n}, a)$$

$$+ d(Sx_{2n+2}, Tx_{2n+1}, a)\}]$$

$$+ k \text{न्यूनतम} [d(Tx_{2n+1}, Tx_{2n+1}, a), d(Sx_{2n+2}, Sx_{2n}, a)]$$

$$\leq pd(Sx_{2n}, Tx_{2n+1}, a)$$

अर्थात्

$$\text{न्यूनतम} [d(y_{2n+1}, y_{2n+2}, a), (\frac{1}{2})\{d(y_{2n}, y_{2n+1}, a)$$

$$+ d(y_{2n+1}, y_{2n+2}, a)\}]$$

$$\leq pd(y_{2n}, y_{2n+1}, a).$$

अब, यदि

$$+ K \frac{d}{dt} (q(x, t), q(y, t), q(z, t))$$

$$p(x, t) > p(y, t)$$

$$p(x, t) = p(y, t) = p(z, t)$$

$$p(x, t) = p(y, t) = p(z, t)$$

or

$$p(x, t) = p(y, t) = p(z, t)$$

$$p(x, t) = p(y, t) = p(z, t)$$

$$p(x, t) = p(y, t) = p(z, t)$$

$$p(x, t) = p(y, t) = p(z, t)$$

or

$$p(x, t) = p(y, t) = p(z, t)$$

$$p(x, t) = p(y, t) = p(z, t)$$

$$p(x, t) = p(y, t) = p(z, t)$$

or

$$\begin{aligned} \text{न्यूनतम } [& d(y_{2n+1}, y_{2n+2}, a), (\frac{1}{2})\{d(y_{2n}, y_{2n+1}, a) \\ & + d(y_{2n+1}, y_{2n+2}, a)\}] \end{aligned}$$

$$= (\frac{1}{2}) [d(y_{2n}, y_{2n+1}, a) + d(y_{2n+1}, y_{2n+2}, a)]$$

तब, चूँकि $0 < p < (1/2)$,

$$(1/2)[d(y_{2n}, y_{2n+1}, a) + d(y_{2n+1}, y_{2n+2}, a)]$$

$$< p d(y_{2n}, y_{2n+1}, a)$$

$$< (1/2) d(y_{2n}, y_{2n+1}, a)$$

जिससे

$$d(y_{2n+1}, y_{2n+2}, a) < 0$$

जो संभव नहीं है, क्योंकि d ऋणोत्तर फलन है. अस्तु ,

$$\text{न्यूनतम } \{d(y_{2n+1}, y_{2n+2}, a), (1/2)[d(y_{2n}, y_{2n+1}, a) + d(y_{2n+1}, y_{2n+2}, a)]\}$$

$$= d(y_{2n+1}, y_{2n+2}, a)$$

Figure 1. $q(Y_{2n+1}, Y_{2n+2}, a), (Y_{2n+1}, Y_{2n+2}, a)$

$+ q(Y_{2n+1}, Y_{2n+2}, a)$

$q(Y_{2n+1}, Y_{2n+2}, a) + q(Y_{2n+1}, Y_{2n+2}, a)$

for $\frac{1}{2} < a < (Y_{2n+1})$

$(Y_{2n+1})q(Y_{2n+1}, Y_{2n+2}, a) + q(Y_{2n+1}, Y_{2n+2}, a)$

$< q(Y_{2n+1}, Y_{2n+2}, a)$

$< (Y_{2n+1})q(Y_{2n+1}, Y_{2n+2}, a)$

Figure

Figure 1. $q(Y_{2n+1}, Y_{2n+2}, a)$

Figure 1. $q(Y_{2n+1}, Y_{2n+2}, a)$

Figure 1. $q(Y_{2n+1}, Y_{2n+2}, a)$

$q(Y_{2n+1}, Y_{2n+2}, a)$

और इसलिए

$$d(y_{2n+1}, y_{2n+2}, a) \leq pd(y_{2n}, y_{2n+1}, a).$$

इसी प्रकार (7.1) में $x = x_{2n+2}$ तथा $y = x_{2n+1}$ रखने पर

$$d(y_{2n+3}, y_{2n+2}, a) \leq pd(y_{2n+2}, y_{2n+1}, a).$$

अस्तु X के सभी a तथा $n = 1, 2, 3, \dots$ के लिए

$$d(y_{n+2}, y_{n+1}, a) \leq pd(y_{n+1}, y_n, a).$$

अतः $\{Tx_1, Sx_2, Tx_3, Sx_4, \dots, Sx_{2n}, Tx_{2n+1}, \dots\}$

एक कौशी अनुक्रम है, और (5.3) के आलोक में n को अनन्त लेने पर

$$Px_{2n} = Tx_{2n+1} + z, \quad Qx_{2n+1} = Sx_{2n+2} + z.$$

परंतु $PPx_{2n} + Pz$ तथा चूंकि युगल $\{P, S\}$ z -उपगाभी क्रमविनिमयी है,
 X के प्रत्येक a के लिए

$$d(SPx_{2n}, PSx_{2n}, a) \rightarrow 0.$$

इससे स्पष्ट है कि

$$q(y_{2n+1}, y_{2n+3}, a) \in pg(y_{2n}, y_{2n+2}, a)$$

हम मानते हैं $x = x_{2n+3}$ तब $y = x_{2n+1}$ तब हम

$$q(y_{2n+3}, y_{2n+5}, a) \in pg(y_{2n+1}, y_{2n+3}, a)$$

अतः x के अर्थ में a तथा $n = 1, 2, 3, \dots$ के लिए

$$q(y_{n+2}, y_{n+4}, a) \in pg(y_{n+1}, y_{n+3}, a)$$

अतः $\{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots\}$

एक श्रृंखला अनुक्रम है और (2.3) के अन्तर्गत n के अन्तर्गत

$$p x_{2n} = x_{2n+1} + x_{2n-1} \quad \text{तब } p x_{2n+1} = x_{2n+2} + x_{2n}$$

अतः $p x_{2n} + p x_{2n+1} = x_{2n+2} + x_{2n+1} + x_{2n+1} + x_{2n} = x_{2n+2} + x_{2n+1} + x_{2n+1} + x_{2n}$

x के अर्थ में a के लिए

$$q(p x_{2n}, p x_{2n+1}, a) \in pg(x_{2n}, x_{2n+1}, a)$$

$$Sz = Pz.$$

अब शर्त (7.1) में $x = Px_{2n}$ तथा $y = x_{2n+1}$ रखने पर

$$\text{न्यूनतम } [d(Px_{2n}, Qx_{2n+1}, a), (1/2)\{d(Px_{2n}, Sx_{2n}, a)$$

$$+ d(Qx_{2n+1}, Tx_{2n+1}, a)\}]$$

$$+k \text{ न्यूनतम } [d(Px_{2n}, Tx_{2n+1}, a), d(Qx_{2n+1}, Sx_{2n}, a)]$$

$$\leq pd(Sx_{2n}, Tx_{2n+1}, a).$$

इसका सीमांत मान लेने पर X के प्रत्येक a के लिए

$$d(Pz, z, a) \leq pd(Pz, z, a)$$

अस्तु

$$d(Pz, z, a) = 0$$

अर्थात्

$$z = Pz$$

इस प्रकार $Tz = Qz$ एवं $z = Qz$.

22 = 22

मात्रा (1) में $x = 2x$ और $x = 2x$

माना $x = 2x$ और $x = 2x$

$x = 2x$ और $x = 2x$

$x = 2x$ और $x = 2x$

$x = 2x$ और $x = 2x$

माना $x = 2x$ और $x = 2x$

$x = 2x$ और $x = 2x$

मात्रा

$x = 2x$ और $x = 2x$

मात्रा

22 = 22

माना $x = 2x$ और $x = 2x$

अतः बिंदु z प्रतिचित्रणों P, Q, S, T का एक उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु है. यह सिद्ध करना आसान है कि z उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु के रूप में अद्वितीय है.

प्रमेय 6 की तरह प्रमेय 7 से हम निम्न प्रमेय प्राप्त कर सकते हैं.

प्रमेय 8. मान लें कि (X, d) एक 2-दूरीक समष्टि है जिसमें d संतत है, यदि P, Q, S, T समष्टि X पर ऐसे स्व-प्रतिचित्रण हैं कि शर्तें (6.1), (6.2), (6.3) और (7.1) संतुष्ट हों तब P, Q, S व T के लिए X में एक अद्वितीय स्थिर बिंदु का अस्तित्व है.

(इस अनुभाग के परिणाम (प्रमेय 3 - 4) विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका के खण्ड 30(1987) में प्रकाशित हुए हैं.)

किसी व्यक्ति के सम्बन्ध में निम्नलिखित बातें जाननी हैं :

1. वह किस स्थान पर रहता है ? 2. वह किस व्यवसाय में कार्य करता है ? 3. वह किस धर्म के अनुयायी है ?

उपरोक्त बातों को जानने के लिए निम्नलिखित प्रश्न पूछे जा सकते हैं :

प्रश्न 1. वह किस स्थान पर रहता है ? (A) गाँव (B) शहर (C) पहाड़ी क्षेत्र (D) समुद्र तट

प्रश्न 2. वह किस व्यवसाय में कार्य करता है ? (A) शिक्षक (B) डॉक्टर (C) किसान (D) व्यापारी

प्रश्न 3. वह किस धर्म के अनुयायी है ? (A) हिन्दू (B) मुस्लिम (C) ईसाई (D) बौद्ध

प्रश्न 4. वह किस जाति के व्यक्ति है ? (A) ब्राह्मण (B) क्षत्रिय (C) वैश्य (D) शूद्र

उपरोक्त प्रश्नों के उत्तर जानने के लिए निम्नलिखित बातें जाननी हैं :

1. वह किस स्थान पर रहता है ? (A) गाँव (B) शहर (C) पहाड़ी क्षेत्र (D) समुद्र तट

चतुर्थ अध्याय

संकुचनीय पुनरावृत्तिक धारी

प्रतिचित्रणों के स्थिर बिंदु

इस अध्याय में 2-दूरीक समष्टि पर एक स्थिर बिंदु प्रमेय प्रतिपादित किया गया है जो सहगल [100] व रंगनाथन [87] आदि के प्रमेयों को 2-दूरीक समष्टि पर विस्तारित एवं व्यापकीकृत करता है. इस अध्याय के प्रमुख अनुभाग हैं:

1. प्रारंभिकी
2. स्थिर बिंदु प्रमेय

1. प्रारंभिकी

मान लें (M, d) एक पूर्ण दूरीक समष्टि है और $f: M \rightarrow M$.

बानाख संकुचन सिद्धांत के विभिन्न व्यापकीकरणों में प्रोफेसर वी०एम०सहगल [100] द्वारा 1969 में प्रदत्त निम्न परिणाम (प्रमेय 1) स्थिर बिंदु सिद्धांत में प्रमुख स्थान रखता है.

प्रमेय 1. मान लें कि पूर्ण दूरीक समष्टि M पर f एक संतत प्रतिचित्रण इस प्रकार है कि धनात्मक संख्या $k < 1$ हेतु M के प्रत्येक बिंदु x के लिए एक धनात्मक पूर्ण संख्या $n(x)$ का ऐसा अस्तित्व होता है कि समष्टि M के प्रत्येक बिंदु y के लिए

$$(1.1) \quad d(f^{n(x)}x, f^{n(x)}y) \leq kd(x, y)$$

संतुष्ट होता है. तब प्रतिचित्रण f एक अद्वितीयस्थिर बिंदु रखता है.

उक्त प्रमेय में f^n का तात्पर्य प्रतिचित्रण f के n वे पुनरावृत्तिक से है. कालांतर में प्रमेय 1 का कुछ गणितज्ञों द्वारा व्यापकीकरण एवं विस्तारण हुआ. दूरीक समष्टि में व्यापकीकरण करने वाले प्रमुख गणितज्ञ हैं किरिक [13], गुसमान [35], आईसेकी [46], खजान्ची [58], मटकोवस्की [63] तथा रे व रोअड्स [88]. चुमकी पंजा व ए०पी०बैष्णव ने प्रमेय 1 का विस्तारण समपरिवेश समष्टि में किया है. श्रीमती (डा०) सुचरिता रंगनाथन [87] ने उक्त प्रमेय का विस्तारण 2-दूरीक समष्टि में किया. इस अध्याय के आगामी अनुभाग में रीच [90] द्वारा अध्ययन किये गये प्रतिचित्रण की भावना का समादर करते हुए रंगनाथन के उक्त प्रमेय का व्यापकीकरण किया जायेगा.

2. स्थिर बिंदु प्रमेय

प्रमेय 2. मान लें कि (X, d) एक पूर्ण 2-दूरीक समष्टि है जिसमें d संतत है. यदि X पर एक प्रतिचित्रण f इस प्रकार हो कि ऋणोत्तर संख्याओं α, β, ν (जहाँ $\alpha + 2\beta + \nu < 1$) के लिए समष्टि X के प्रत्येक अवयव x हेतु एक धनात्मक पूर्णांक $n(x)$ का ऐसा अस्तित्व प्राप्त होता है कि X के सभी y, a के लिए प्रतिबंध

$$(2.1) \quad d(f^{n(x)} x, f^{n(x)} y, a) \leq \alpha d(x, f^{n(x)} x, a) + \beta d(x, f^{n(x)} y, a) + \nu d(x, y, a).$$

संतुष्ट होता हो, तब प्रतिचित्रण f का एक अद्वितीय स्थिर बिंदु (मान लें u) होता है तथा X के प्रत्येक x_0 के लिए $\{f^n x_0\}$ बिंदु u पर अभिसरित होता है.

इस प्रमेय की उपपत्ति हेतु निम्न प्रमेयिका का प्रयोग होगा.

प्रमेयिका. यदि X पर प्रतिचित्रण f समष्टि X के प्रत्येक बिंदु x के लिए प्रमेय 1 के प्रतिबंध को संतुष्ट करता हो तो X के प्रत्येक a के लिए $\nu(x) = \text{उच्चक } d(f^n x, x, a) \text{ परिमित है.}$

प्रमेयिका की उपपत्ति. मान लें X के x तथा समस्त a के लिए

$$l(x) = \text{अधिकतम } \{d(f^k x, x, a) : k = 0, 1, 2, \dots, n(x)\}.$$

किसी धनात्मक पूर्णांक n के लिए, मान लें $r \geq 0$ और $0 \leq s < n(x) - 1$

इस प्रकार है कि

$$n = v n(x) + s. \text{ तब}$$

$$(2) \quad d(x, f^{rn(x)+s} x, a')$$

$$\leq d(x, f^{n(x)} x, a) + d(f^{rn(x)+s} x, f^{n(x)} x, a)$$

$$+ d(f^{n(x)} x, f^{rn(x)+s} x, x).$$

(1) से, (2) के दायें पक्ष में अंतिम पद का मान शून्य है. पुनः (1) से

$$d(f^{rn(x)+s} x, f^{n(x)} x, a)$$

$$\leq \alpha d(x, f^{n(x)} x, a) + \beta d(x, f^{rn(x)+s} x, a)$$

$$+ v d(x, f^{(r-1)n(x)+s} x, a)$$

$$\leq \alpha l(x) + \beta [d(x, f^{n(x)} x, a) + d(x, f^{rn(x)+s} x, f^{n(x)} x) +$$

$$d(f^{rn(x)+s} x, f^{n(x)} x, a)] + v d(x, f^{(r-1)n(x)+s} x, a)$$

अर्थात्

$$d(f^{rn(x)+s} x, f^{n(x)} x, a)$$

$$\leq p\ell(x) + qd(x, f^{(r-1)n(x)+s} x, a)$$

जहाँ $p = \{(\alpha + \beta)/(1 - \beta)\} < 1$, $q = \{\nu/(1 - \beta)\} < 1$.

इसलिए (2) से,

$$d(x, f^{rn(x)+s} x, a)$$

$$\leq (1+p)\ell(x) + qd(x, f^{(r-1)n(x)+s} x, a).$$

इस असमिका का $(r-1)$ बार उपयोग करने पर

$$d(x, f^{rn(x)+s} x, a)$$

$$\leq (1+p)\ell(x)[1 + q + q^2 + \dots + q^{r-1}] + q^r d(x, f^s x, a)$$

$$\leq (1+p)\ell(x)[1 + q + q^2 + \dots + q^{r-1}] + q^r \ell(x)$$

$$\leq (1+p)\ell(x)[1 + q + q^2 + \dots + q^{r-1} + q^r]$$

पृष्ठ

$$d(x, l^{n(x)+s}, x, l^{n(x)+s})$$

$$p(x) + d(x, l^{(r-1)n(x)+s}, x, l^{(r-1)n(x)+s})$$

$$1 > [(s-1)\backslash(1-s)] = p, 1 > [(s-1)\backslash(1-s)] = q$$

प्रमाण (2)।

$$d(x, l^{n(x)+s}, x, l^{n(x)+s})$$

$$d(x, l^{(r-1)n(x)+s}, x, l^{(r-1)n(x)+s})$$

प्रमाण (1)। यह प्रमाण है कि

$$d(x, l^{n(x)+s}, x, l^{n(x)+s})$$

$$d(x, l^{n(x)+s}, x, l^{n(x)+s})$$

$$d(x, l^{n(x)+s}, x, l^{n(x)+s})$$

$$d(x, l^{n(x)+s}, x, l^{n(x)+s})$$

$$\leq (1+p) r(x)/(1-q).$$

प्राप्त होता है.

क्योंकि $n=rn(x)$ मनमाना है अतः $r(x)$ परिमित है.

प्रमेय की उपपत्ति. मान लें X में x मनमाना है. मान लें $m_0=n(x_0)$, $x_1=f^{m_0}x_0$ और उत्तरोत्तर क्रम में $m_i=n(x_i)$, $x_{i+1}=f^{m_i}x_i$.

सर्व प्रथम हम यह दर्शाते हैं कि $t \geq i$ के लिए

$$(3) \quad d[x_i, x_{i+1}, x_t] = 0$$

अतः t का मान i अथवा $i+1$ है. मान लें $t > i+1$. तब

$$x_t = f^{m_{t-1}} x_{t-1} = f^{m_{t-1}} f^{m_{t-2}} x_{t-2} = \dots$$

$$= f^\lambda f^{m_i} x_i, \quad \lambda = m_{i+1} + m_{i+2} + \dots + m_{t-1}$$

$$= f^{m_i} (f^\lambda x_i).$$

इसलिए (1) से

$$d(x_{i+1}, x_t, x_i) = d(f^{m_i} x_i, f^{\lambda} x_i, x_i) = 0.$$

तथा (1) से ही

$$\begin{aligned} d(x_2, x_1, a) &= d(f^{m_0} f^{m_1} x_0, f^{m_0} x_0, a) \\ &\leq \alpha d(x_0, x_1, a) + \beta d(x_0, x_2, a) + \nu d(x_0, f^{m_1} x_0, a) \\ &\leq \alpha d(x_0, x_1, a) + \beta [d(x_0, x_1, a) + d(x_2, x_1, a) \\ &\quad + d(x_0, x_2, x_1)] + \nu d(f^{m_1} x_0, x_0, a) \end{aligned}$$

क्योंकि (3) से, $d(x_0, x_2, x_1) = 0$

इसलिए

$$\begin{aligned} (4) \quad &d(x_2, x_1, a) \\ &\leq p d(x_1, x_0, a) + q d(f^{m_1} x_0, x_0, a) \end{aligned}$$

जहाँ p तथा q के मान वही हैं जो प्रमेयिका की उपपत्ति में माने गये हैं.

इसी प्रकार

§ (1) प्रमाण

$$0 = (x_1, x_1, \dots, x_1, x_1^{m-1})b = (x_1, x_1, \dots, x_1, x_1)b$$

§ (2) प्रमाण

$$(a, 0x, 0x, \dots, 0x, 1x^{m-1})b = (a, 1x, 0x, \dots, 0x)b$$

$$(a, 0x, 1x^{m-1}, 0x)b + (a, 0x, 0x, \dots, 0x)bq + (a, 1x, 0x, \dots, 0x)b = 0$$

$$(a, 1x, 0x, \dots, 0x)b + (a, 1x, 0x, \dots, 0x)b = a + (a, 1x, 0x, \dots, 0x)b = 0$$

$$(a, 0x, 0x, \dots, 0x, 1x^{m-1})b + ((1x, 0x, 0x, \dots, 0x)b +$$

$$0 = (1x, 0x, 0x, \dots, 0x)b \quad \text{§ (3) प्रमाण}$$

प्रमाण

$$(a, 1x, 0x, \dots, 0x)b \quad (A)$$

$$(a, 0x, 0x, \dots, 0x, 1x^{m-1})bp + (a, 0x, 1x, \dots, 0x)bq =$$

§ (4) प्रमाण

प्रमाण

$$(5) \quad d(x_3, x_2, a) \\ \leq p d(x_2, x_1, a) + q d(f^{m_2} x_1, x_1, a).$$

और (1) ही से,

$$d(f^{m_2} x_1, x_1, a) = d(f^{m_0} f^{m_2} x_0, f^{m_0} x_0, a) \\ \leq \alpha d(x_0, x_1, a) + \beta d(x_0, f^{m_2} x_1, a) + \gamma d(x_0, f^{m_2} x_0, a) \\ \leq \alpha d(x_0, x_1, a) + \beta [d(x_0, x_1, a) + d(f^{m_2} x_1, x_1, a) \\ + d(x_0, f^{m_2} x_1, x_1)] + \gamma d(f^{m_2} x_0, x_0, a),$$

क्योंकि (1) से

$$d(x_0, f^{m_2} x_1, x_1) = d(f^{m_0} x_0, f^{m_0} f^{m_2} x_0, x_0) = 0$$

इसलिए

$$(6) \quad d(f^{m_2} x_1, x_1, a) \\ \leq p d(x_1, x_0, a) + q d(f^{m_2} x_0, x_0, a)$$

प्राप्त होता है.

$$(a, x, x/b)$$

(2)

$$(a, x, x/b) + (a, x, x/b) = (a, x, x/b)$$

सिद्ध (1) से

$$(a, x, x/b) = (a, x, x/b)$$

$$(a, x, x/b) + (a, x, x/b) = (a, x, x/b)$$

$$(a, x, x/b) + (a, x, x/b) = (a, x, x/b)$$

$$(a, x, x/b) + (a, x, x/b) = (a, x, x/b)$$

सिद्ध (1) से

$$(a, x, x/b) = (a, x, x/b)$$

प्रमाण

$$(a, x, x/b)$$

(3)

$$(a, x, x/b) + (a, x, x/b) = (a, x, x/b)$$

सिद्ध (1) से

अतः (4) तथा (6) से (5) में प्रतिस्थापित करने पर

$$d(x_3, x_2, a)$$

$$\leq p(p+q) d(x_1, x_0, a) + pqd(f^{m_1}x_0, x_0, a) + q^2d(f^{m_2}x_0, x_0, a).$$

व्यापक रूप में,

$$d(x_{n+1}, x_n, a)$$

$$\leq p(p+q)^{n-1} d(x_1, x_0, a) + pq(p+q)^{n-2} d(f^{m_1}x_0, x_0, a) + pq^2(p+q)^{n-3} \\ \times d(f^{m_2}x_0, x_0, a) \dots + pq^{n-1} d(f^{m_{n-1}}x_0, x_0, a) + q^n d(f^{m_n}x_0, x_0, a)$$

$$\leq [p(p+q)^{n-1} + pq(p+q)^{n-2} + pq^2(p+q)^{n-3} + \dots + pq^{n-1} + q^n] r(x_0)$$

$$= (p+q)^n r(x_0)$$

अर्थात्

$$(7) \quad d(x_{n+1}, x_n, a) = k^n r(x_0)$$

जहाँ $k = p+q < 1$.

$m < n$ के लिए (7) का बारंबार उपयोग करने पर,

$$d(x_m, x_n, a) \\ \leq d(x_m, x_{m+1}, a) + d(x_{m+1}, x_n, a) + d(x_m, x_n, x_{m+1})$$

$$\leq k^m r(x_0) + d(x_{m+1}, x_n, a)$$

$$[\because (3) \text{ से } d(x_m, x_n, x_{m+1}) = 0]$$

अतः

$$d(x_m, x_n, a)$$

$$\leq k^m r(x_0) + k^{m+1} r(x_0) + d(x_{m+2}, x_n, a)$$

$$\leq (k^m + k^{m+1} + \dots + k^{n-1}) r(x_0)$$

$$< \{k^m / (1-k)\} r(x_0).$$

क्योंकि $r(x_0)$ परिमित है, अतः जैसे ही m, n को अनन्त लेते हैं

$$d(x_m, x_n, a) \rightarrow 0$$

म $< n$ के लिए (7) में माना जाता है कि

$$q(x_n, x_m) \leq b$$

$$q(x_{l+m}, x_n, x_m) \leq b + q(x_{m+1}, x_n, x_{l+m}) \leq b + q(x_{m+1}, x_n, x_{m+1})$$

$$q(x_n, x_{l+m}, x_{m+1}) \leq b + q(x_{m+1}, x_n, x_{m+1})$$

$$0 \leq q(x_{l+m}, x_n, x_{m+1}) \leq b \quad \therefore (3) \text{ में } b = 0$$

157

$$q(x_n, x_m) \leq b$$

$$q(x_n, x_{m+1}, x_{m+1}) \leq b + q(x_{m+1}, x_n, x_{m+1}) \leq b + q(x_{m+1}, x_n, x_{m+1})$$

$$q(x_n, x_{m+1}, x_{m+1}) \leq b + q(x_{m+1}, x_n, x_{m+1})$$

$$q(x_n, x_{m+1}, x_{m+1}) \leq b + q(x_{m+1}, x_n, x_{m+1})$$

$$q(x_n, x_{m+1}, x_{m+1}) \leq b + q(x_{m+1}, x_n, x_{m+1})$$

$$q(x_n, x_{m+1}, x_{m+1}) \leq b + q(x_{m+1}, x_n, x_{m+1})$$

इसलिए $\{x_n\}$ कौशी अनुक्रम है अतः अभिसारी है. मान लें $\{x_n\}$ बिंदु u पर अभिसारित होता है. (1) से

$$\begin{aligned} & d(f^{n(u)}_{x_n}, f^{n(u)}_u, a) \\ & \leq \alpha d(u, f^{n(u)}_u, a) + \beta d(u, f^{n(u)}_{x_n}, a) + \gamma d(u, x_n, a) \\ & \leq \alpha d(u, f^{n(u)}_u, a) + \beta [d(u, x_n, a) + d(x_n, f^{n(u)}_{x_n}, a) \\ & \quad + d(u, f^{n(u)}_{x_n}, x_n)] + \gamma d(u, x_n, a) \end{aligned}$$

और

$$\begin{aligned} & d(f^{n(u)}_{x_n}, f^{n(u)}_u, x_n) \\ & \leq \alpha d(u, f^{n(u)}_u, x_n) + \beta d(u, f^{n(u)}_{x_n}, x_n) + 0, \end{aligned}$$

निम्न असमिका

$$\begin{aligned} & d(u, f^{n(u)}_u, a) \\ & \leq d(u, x_n, a) + d(u, f^{n(u)}_u, x_n) + d(x_n, f^{n(u)}_u, a) \end{aligned}$$

माना (n, x) का मान $\frac{1}{2}$ है। इससे हमें $\frac{1}{2}$ प्राप्त होता है। (n, x) का मान $\frac{1}{2}$ है। (1) से हमें $\frac{1}{2}$ प्राप्त होता है।

$$(n, x, u) = (n, x, u) + (n, x, u) + (n, x, u) + \dots$$

$$(n, x, u) + (n, x, u) + (n, x, u) + (n, x, u) + \dots$$

$$(n, x, u) + (n, x, u) + (n, x, u) + (n, x, u) + \dots$$

$$(n, x, u) + (n, x, u) + (n, x, u) + (n, x, u) + \dots$$

अतः

$$(n, x, u) = (n, x, u) + (n, x, u) + (n, x, u) + \dots$$

$$(n, x, u) + (n, x, u) + (n, x, u) + (n, x, u) + \dots$$

अतः हमें

$$(n, x, u) = (n, x, u) + (n, x, u) + (n, x, u) + \dots$$

$$(n, x, u) + (n, x, u) + (n, x, u) + (n, x, u) + \dots$$

$$\leq d(u, x_n, a) + d(u, f^{n(u)}u, x_n) + d(x_n, f^{n(u)}x_n, a) \\ + d(f^{n(u)}x_n, f^{n(u)}u, a) + d(x_n, f^{n(u)}u, f^{n(u)}x_n)$$

से

$$(8) \quad (1 - \alpha) d(u, f^{n(u)}u, a)$$

$$\leq (1 + \beta + \nu) d(u, x_n, a) + (1 + \alpha) d(u, f^{n(u)}u, x_n) \\ + (1 + \beta) d(x_n, f^{n(u)}x_n, a) + 2\beta d(x_n, f^{n(u)}x_n, u)$$

प्राप्त होता है.

(1) से

$$d(x_n, f^{n(u)}x_n, a) = d(f^{m_{n-1}}x_{n-1}, f^{m_{n-1}}f^{n(u)}x_{n-1}, a) \\ \leq \alpha d(x_{n-1}, x_n, a) + \beta d(x_{n-1}, f^{n(u)}x_n, a) + \nu d(x_{n-1}, f^{n(u)}x_{n-1}, a) \\ \leq \alpha d(x_{n-1}, x_n, a) + \beta [d(x_{n-1}, x_n, a) + d(x_n, f^{n(u)}x_n, a) \\ + d(x_{n-1}, x_n, f^{n(u)}x_n)] + \nu d(x_{n-1}, f^{n(u)}x_{n-1}, a).$$

क्योंकि (1) से

$$d(x_{n-1}, x_n, f^{n(u)}x_n) = d(f^{m_{n-1}}x_{n-1}, f^{m_{n-1}}f^{n(u)}x_{n-1}, x_{n-1}) = 0,$$

इसलिए

$$d(x_n, f^{n(u)}x_n, a) \leq pd(x_{n-1}, x_n, a) + qd(x_{n-1}, f^{n(u)}x_{n-1}, a)$$

जहाँ p और q के मान वही हैं जो प्रमेयिका की उपपत्ति में माने गये हैं. (7) के आलोक में, हमें

$$d(x_n, f^{n(u)}x_n, a) \leq pk^{n-1}r(x_0) + qd(x_{n-1}, f^{n(u)}x_{n-1}, a),$$

(जहाँ $k = p + q < 1$.)

प्राप्त होता है.

इस असमिका का $(n-1)$ बार उपयोग करने से,

$$\begin{aligned} & d(x_n, f^{n(u)}x_n, a) \\ & \leq [pk^{n-1} + pqk^{n-2} + p^2qk^{n-3} + \dots + p^{n-2}qk + p^{n-1}q + q^n]r(x_0) \\ & \leq r(x_0)[p(p+q)^{n-1} + pq(p+q)^{n-2} + p^2q(p+q)^{n-3} + p^{n-2}q(p+q) + p^{n-1}q + q^n] \end{aligned}$$

$$= r(x_0) (p+q)^n$$

प्राप्त होता है.

अर्थात्

$$(9) \quad d(x_n, f^{n(u)} x_n, a) \leq k^n r(x_0).$$

इसी प्रकार

$$(10) \quad d(x_n, f^{n(u)} x_n, u) \leq k^n r(x_0).$$

(9) तथा (10) से (8) में प्रतिस्थापित करने पर

$$(1 - \alpha) d(u, f^{n(u)} u, a)$$

$$\leq (1 + \beta + \gamma) d(u, x_n, a) + (1 + \alpha) d(u, f^{n(u)} u, x_n) + (1 + 3\beta) k^n r(x_0)$$

प्राप्त होता है.

इसमें n को अनंत लेने पर,

$$(1 - \alpha) d(u, f^{n(u)} u, a) \leq 0$$

प्राप्त होता है.

$$n(p+q) (x_0) r =$$

है कि यह सत्य
होगा

$$(e) \quad a(x_n, t) \leq a(x_0, t) \leq a(x_0, t) \leq a(x_0, t)$$

अतः यह

$$(10) \quad a(x_n, t) \leq a(x_0, t) \leq a(x_0, t) \leq a(x_0, t)$$

अतः यह सत्य है कि (8) है (10) कि (9)

$$(1 - a) \leq a(x_n, t) \leq a(x_0, t)$$

$$(1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}) \leq a(x_n, t) \leq a(x_0, t)$$

है कि यह सत्य

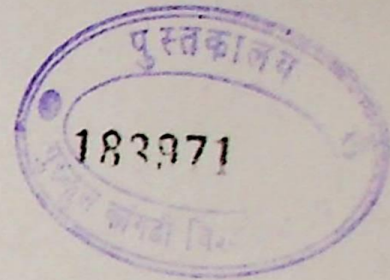
अतः यह सत्य है कि

$$(1 - a) \leq a(x_n, t) \leq a(x_0, t)$$

है कि यह सत्य

अतः

$$u = f^{n(u)} u.$$



इसलिए u प्रतिचित्रण $f^{n(u)}$ का स्थिर बिंदु है.

मान लें v (u से भिन्न है) भी $f^{n(u)}$ का स्थिर बिंदु है. तब (1) से, X के प्रत्येक a के लिए

$$d(u, v, a) = d(f^{n(u)} u, f^{n(u)} v, a) \leq (\beta + v) d(u, v, a),$$

अतः

$$u = v.$$

इस प्रकार u अद्वैतीय है.

क्योंकि

$$u = f^{n(u)} u$$

इस कारण से

$$f u = f^{n(u)} f u$$



178

$$u = \frac{1}{2} n(u)$$

$$u = \frac{1}{2} n(u) \quad \text{जहाँ } n(u) \text{ का अर्थ है } u \text{ का नकार}$$

$$u = \frac{1}{2} n(u) \quad \text{जहाँ } n(u) \text{ का अर्थ है } u \text{ का नकार}$$

$$(1) \quad x \text{ के लिये } a \text{ का अर्थ है } x$$

$$d(u, v, a) = d(u, v, a) + d(u, v, a) = d(u, v, a) + d(u, v, a)$$

179

$$u = v$$

$$u = \frac{1}{2} n(u) \quad \text{जहाँ } n(u) \text{ का अर्थ है } u \text{ का नकार}$$

जहाँ

$$u = \frac{1}{2} n(u)$$

जहाँ

$$u = \frac{1}{2} n(u)$$

यह दर्शाता है कि fu भी $f^{n(u)}$ का स्थिर बिंदु है. अतः $u=fu$ अद्वितीय है. अभी यह सिद्ध करना शेष है कि

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n x_0 = u.$$

मान लें, x के समस्त a के लिए,

$$M = \text{अधिकतम } \{d(f^m x_0, u, a) : m = 0, 1, 2, \dots, n(u)-1\}.$$

यदि n पर्याप्त बृहत् पूर्णांक है, तब

$$n = r n(u) + s, \quad 0 \leq s < n(u), \quad r > 0,$$

और (1) से

$$\begin{aligned} d(f^n x_0, u, a) &= d(f^{rn(u)+s} x_0, f^{n(u)} u, a) \\ &\leq \beta d(u, f^n x_0, a) + \nu d(u, f^{(r-1)n(u)+s} x_0, a) \end{aligned}$$

अथवा

$$\begin{aligned} d(f^n x_0, u, a) &= d(f^{rn(u)+s} x_0, u, a) \\ &\leq q d(f^{(r-1)n(u)+s} x_0, u, a) \leq q^2 d(f^{(r-2)n(u)+s} x_0, u, a) \end{aligned}$$

माना $a = 0$ तब $(1-x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 - \dots$ $(1-x)^n$ के x की शक्ति का गुणांक 0 है।

$$a = 0 \text{ तब } (1-x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 - \dots$$

यदि $a > 0$ तब $(1-x)^n$ के x की शक्ति का गुणांक 0 है।

$$(1-x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 - \dots + (-1)^n x^n$$

यदि $a < 0$ तब $(1-x)^n$ के x की शक्ति का गुणांक 0 है।

$$n = 1, 2, 3, \dots, n \text{ तब } (1-x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 - \dots$$

यदि $a < 0$ तब $(1-x)^n$ के x की शक्ति का गुणांक 0 है।

$$(1-x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 - \dots + (-1)^n x^n$$

$$(1-x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 - \dots + (-1)^n x^n$$

यदि

$$(1-x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 - \dots + (-1)^n x^n$$

$$(1-x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 - \dots + (-1)^n x^n$$

$$\leq q^r d(f^s x_0, u, a)$$

$$\leq q^r M + 0.$$

(n को अनंत लेने पर.)

अतः $\{f^n x_0\}$ समष्टि X के प्रत्येक x_0 के लिए u पर अभिसरित होता है.

इस प्रकार प्रमेय की उपपत्ति पूर्ण हुई.

टिप्पणी : एस0 रंगनाथन [87] की प्रमेय इस प्रमेय की $\alpha = \beta = 0$ तथा ψ एक नियतांक के लिए विशेष स्थिति है.

पंचम अध्याय

प्रतिचित्रणों के अनुक्रम का अभिसरण एवं सम परिवेश समष्टियों में स्थिर बिंदु

मान लें P, S, T, P_n, S_n, T_n ($n = 1, 2, \dots$) सम परिवेश समष्टि पर प्रतिचित्रण हैं तथा u प्रतिचित्रणों P, S, T का उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु है और u_n प्रतिचित्रणों P_n, S_n, T_n ($n = 1, 2, \dots$) का स्थिर बिंदु है. इस अध्याय में उन शर्तों का अध्ययन किया है जिनके अधीन प्रतिचित्रण अनुक्रमों $\{P_n\}$, $\{S_n\}$ और $\{T_n\}$ के क्रमशः P, S और T को (बिंदुशः अथवा एकसमान रूप से) अभिसरित होने की स्थिति में स्थिर बिंदु अनुक्रम $\{u_n\}$ बिंदु u को अभिसरित होता है.

यह अध्याय निम्न अनुभागों में विभक्त है -

1. प्रारंभिकी.
2. सांस्थितिक प्रारंभिकी
3. परिणाम
4. टिप्पणियाँ

1. प्रारंभिकी

अनेक गणितज्ञों ने ऐसे प्रतिबंध का अन्वेषण किया है जिनके अधीन यदि किसी दूरीक समष्टि पर प्रतिचित्रणों का अनुक्रम किसी प्रतिचित्रण T पर अभिसरित होता हो, तो प्रतिचित्रणों के अनुक्रम के स्थिर बिंदु का अनुक्रम T के स्थिर बिंदु पर अभिसरित होता है. यह अन्वेषण प्रारंभ करने का श्रेय प्रोफेसर एफ० एफ० बोन्साल [5] को प्राप्त है. वास्तव में उन्होंने ही सर्वप्रथम सिद्ध किया कि -

मान लें E एक पूर्ण दूरीक समष्टि है तथा लिपशिट्ज स्थिरांक $k < 1$ के साथ E पर T_n ($n=1, 2, \dots$) ऐसे संकुचन स्व-प्रतिचित्रण हैं जिनके स्थिर बिंदु u_n ($n = 1, 2, \dots$) हैं. मान लें E के प्रत्येक x के लिए सीमा $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n x = Tx$, जहाँ प्रतिचित्रण T दूरीक समष्टि E पर स्व-प्रतिचित्रण है. तब T के अद्वितीय स्थिर बिंदु u का अस्तित्व है तथा वह इस प्रकार है कि सीमा $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$.

इस परिणाम को अनेक विन्यासों के लिए उन्नत और व्यापकीकृत किया गया है. नेडलर [68] ने प्रेक्षित किया कि प्रत्येक संकुचन प्रतिचित्रण के लिए समान लिपशिट्ज स्थिरांक $k < 1$ होने का प्रतिबंध कठोर है और उन्होंने इस प्रतिबंध को समाप्त किया.

मिश्रा [66] ने प्रो० बोन्साल के परिणाम को सम परिवेश समष्टि के लिए विस्तारित किया ([3] और [94] भी देखें) तथा सिंह एवं मिश्रा [127] ने सम परिवेश समष्टियों पर प्रतिचित्रण युगल के लिए अभिसरण प्रमेय की स्थापना की (नीचे (1.1) और (2.1) देखें).

इस अध्याय में हम सम परिवेश समष्टियों पर प्रतिचित्रण - अनुक्रम के युगल और

2. सांस्थितिक प्रारंभिकी

मान लें (X, ψ) ऐसा समपरिवेश समष्टि (देखें केली [55]) है जो X पर छद्मदूरीक कुल

$D = \{d_i : i \in I, \text{ सूचीकरण समुच्चय } \}$ से पारिभाषित है, हम निम्नलिखित संकेतों का प्रयोग करेंगे.

$$V_{(d_i, r)} = \{(x, y) : x, y \in X, d_i(x, y) < r, r > 0\}$$

और

$$G = \{V : V = \bigcap_{i \in F} V_{(d_i, r_i)}, d_i \in D, r_i > 0, F \subseteq I, F \text{ परिमित है} \}.$$

$$V = \bigcap_{i \in F} V_{(d_i, r_i)} \in G, \quad \text{के लिए, मान लें}$$

$${}_s V = \begin{cases} \bigcap_{i \in F} V_{(d_i, sr_i)}, & \text{यदि } s > 0 \\ \text{(विकर्ण) यदि } s = 0. \end{cases}$$

G में मनमाने V के लिए X पर छद्मदूरीक समष्टि p का इस प्रकार अस्तित्व है कि $V = V_{(p, 1)}$. ऐसे p को V का मिन्कोव्स्की छद्मदूरीक कहते हैं. सांस्थितिक प्रारंभिकी के विस्तृत विवरण के लिए केली [55] और आचार्या [2] देखें.

गणित

मान लें (X, ϕ) एक वृक्ष है जहाँ ϕ एक फंक्शन है जो X से X में मान लेता है।

हम निम्नलिखित परिभाषा देते हैं:

मान लें X एक वृक्ष है और ϕ एक फंक्शन है जो X से X में मान लेता है।

हम निम्नलिखित परिभाषा देते हैं:

$$V(x, y) = \{ (x, y) : x, y \in X, \phi(x) = y \}$$

यदि

$$G = (V, E) \text{ एक ग्राफ है जहाँ } V = \{ (x, y) : x, y \in X, \phi(x) = y \} \text{ और } E = \{ (x, y) : x, y \in X, \phi(x) = y \}$$

$$V = \{ (x, y) : x, y \in X, \phi(x) = y \}$$

$$V = \{ (x, y) : x, y \in X, \phi(x) = y \}$$

हम निम्नलिखित परिभाषा देते हैं:

मान लें X एक वृक्ष है और ϕ एक फंक्शन है जो X से X में मान लेता है।

हम निम्नलिखित परिभाषा देते हैं:

3. परिणाम

सिंह एवं मिश्रा [127] ने निम्न परिणाम प्राप्त किये हैं.

प्रमेय 1. मान लें कि हाउसडोर्फ समपरिवेश समष्टि X पर z_n उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु वाले प्रतिचित्रण S_n व T_n हैं, $n = 1, 2, \dots$, तथा ऋणोत्तर वास्तविक संख्याओं $a_i (i=1, 2, \dots, 5)$, $a_3 + a_4 + a_5 < 1$ का अस्तित्व इस प्रकार है कि $V_i \in G$ ($i = 1, 2, \dots, 5$) और $x, y \in X$ के लिए

$$(1.1) \quad (S_n x, S_n y) \in a_1 V_1 \circ a_2 V_2 \circ a_3 V_3 \circ a_4 V_4 \circ a_5 V_5$$

यदि $(S_n x, T_n x) \in V_1$, $(S_n y, T_n y) \in V_2$, $(S_n x, T_n y) \in V_3$,

$$(S_n y, T_n x) \in V_4 \quad \text{और} \quad (T_n x, T_n y) \in V_5.$$

यदि क्रमशः अनुक्रमों $\{S_n\}$ व $\{T_n\}$ का बिंदुशः अभिसरण उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु z वाले प्रतिचित्रणों $S, T : X \rightarrow X$ को होता है, तब $z_n \rightarrow z$.

प्रमेय 2. मान लें कि हाउसडोर्फ समपरिवेश समष्टि X पर z_n उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु वाले प्रतिचित्रण S_n व T_n हैं, $n = 1, 2, \dots$, तथा $V_i \in G (i=1, \dots, 5)$ और $x, y \in X$ के लिए z उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु वाले प्रतिचित्रण $S, T : X \rightarrow X$ इस प्रकार हैं कि

$$(2.1) \quad (Sx, Sy) \in a_1 V_1 \circ a_2 V_2 \circ a_3 V_3 \circ a_4 V_4 \circ a_5 V_5,$$

$$\text{यदि} \quad (Sx, Tx) \in V_1, \quad (Sy, Ty) \in V_2, \quad (Sx, Ty) \in V_3,$$

$$(Sy, Tx) \in V_4 \quad \text{और} \quad (Tx, Ty) \in V_5,$$

जहाँ a_i ($i = 1, \dots, 5$) ऋणोत्तर वास्तविक संख्याएँ $a_3 + a_4 + a_5 < 1$ को संतुष्ट करती हैं. यदि $\{S_n\}$ व $\{T_n\}$ क्रमशः S और T को एक समान रूप से अभिसरित होते हैं तो $z_n \rightarrow z$.

शर्तों (1.1) और (2.1) को सम परिवेश समष्टियों पर व्यापकीकृत युंक्त संकुचन शर्तें कहते हैं. ये शर्तें युंक्त [49] के अनुसार दूरीक समष्टि (E, d) पर प्रतिचित्रणों $S, T : E \rightarrow E$ से प्रेरित हैं, जहाँ

$$d(Sx, Sy) \leq kd(Tx, Ty), \quad x, y \in E, \quad 0 < k < 1.$$

दूरीक समष्टि में युंक्त प्रतिचित्रणों के विस्तृत अध्ययन के लिए सिंह [114] देखें. यदि प्रतिचित्रण S व T शर्त (2.1) को संतुष्ट करें, क्रमविनिमयी हों तथा $S(X) \subseteq T(X)$, तो अनुक्रमतः पूर्ण हाउसडोर्फ समष्टि X में प्रतिचित्रणों S व T का एक अद्वितीय स्थिर बिंदु प्राप्त होगा बशर्त कि T संतत हो और

$$0 < a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 < 1, \quad (\text{देखें [119]}).$$

अभिसरण प्रमेयों को सिद्ध करने के लिए नेडलर [68] और रोअड्स

$$(2.1) \quad (x_1, y_1) \in V_1, (x_2, y_2) \in V_2, \dots, (x_n, y_n) \in V_n$$

$$(2.2) \quad (x_1, y_1) \in V_1, (x_2, y_2) \in V_2, \dots, (x_n, y_n) \in V_n$$

$$(2.3) \quad (x_1, y_1) \in V_1, (x_2, y_2) \in V_2, \dots, (x_n, y_n) \in V_n$$

$$(2.4) \quad (x_1, y_1) \in V_1, (x_2, y_2) \in V_2, \dots, (x_n, y_n) \in V_n$$

$$(2.5) \quad (x_1, y_1) \in V_1, (x_2, y_2) \in V_2, \dots, (x_n, y_n) \in V_n$$

$$(2.6) \quad (x_1, y_1) \in V_1, (x_2, y_2) \in V_2, \dots, (x_n, y_n) \in V_n$$

$$(2.7) \quad (x_1, y_1) \in V_1, (x_2, y_2) \in V_2, \dots, (x_n, y_n) \in V_n$$

$$(2.8) \quad (x_1, y_1) \in V_1, (x_2, y_2) \in V_2, \dots, (x_n, y_n) \in V_n$$

$$(2.9) \quad (x_1, y_1) \in V_1, (x_2, y_2) \in V_2, \dots, (x_n, y_n) \in V_n$$

$$(2.10) \quad (x_1, y_1) \in V_1, (x_2, y_2) \in V_2, \dots, (x_n, y_n) \in V_n$$

$$(2.11) \quad (x_1, y_1) \in V_1, (x_2, y_2) \in V_2, \dots, (x_n, y_n) \in V_n$$

$$(2.12) \quad (x_1, y_1) \in V_1, (x_2, y_2) \in V_2, \dots, (x_n, y_n) \in V_n$$

$$(2.13) \quad (x_1, y_1) \in V_1, (x_2, y_2) \in V_2, \dots, (x_n, y_n) \in V_n$$

$$(2.14) \quad (x_1, y_1) \in V_1, (x_2, y_2) \in V_2, \dots, (x_n, y_n) \in V_n$$

[92, 94] सहित अधिकांश गणितज्ञों ने प्रतिचित्रणों के स्थिर बिंदुओं के अस्तित्व के लिए आवश्यक समस्त शर्तों का प्रयोग किया है परंतु हमने इन प्रमेयों में केवल प्रतिचित्रणों S_n , T_n और S, T के उभयनिष्ठ स्थिर बिंदुओं के अस्तित्व को माना है. यह तथ्य निम्न उदाहरण से स्पष्ट है.

उदाहरण [114]. मान लें कि सामान्य परिवेष्टक के साथ $X = [0, 2]$ पर एक सम परिवेश समष्टि है. प्रतिचित्रण S_n व T_n निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$S_n x = 1 + x/(2n+2) \quad \text{और} \quad T_n x = \{n/(n+1)\}x + 2/(2n+1)$$

$n = 1, 2, \dots$ तब S_n व T_n का उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु $z_n = (2n+2)/(2n+1)$ ($n = 1, 2, \dots$) है तथा X के प्रत्येक बिंदु x के लिए $Sx = 1$ और $Tx = x$. इस प्रकार $z_n \rightarrow z = 1$. यह आसानी से देखा जा सकता है कि S_n व T_n ऋणोत्तर संख्याएँ $a_i = 0$ ($i=1, \dots, 4$), $a_5 \in [1/2, 1)$ के साथ X के सभी बिंदुओं x, y के लिए (1.1) को संतुष्ट करते हैं. स्पष्टतः S_n व T_n क्रमविनिमयी नहीं हैं.

अब हम तीन प्रतिचित्रण अनुक्रमों के लिए अभिसरण प्रमेयों का अध्ययन करेंगे.

प्रमेय 3. मान लें P_n, S_n व T_n हाउसडोर्फ सम परिवेश समष्टि X पर z_n ($n=1, 2, \dots$) उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु वाले प्रतिचित्रण हैं तथा G में V_i ($i = 1, \dots, 5$) और $x, y \in X$ इस प्रकार है कि

$$(3.1) \quad (P_n x, P_n y) \in a_1 V_1 \circ a_2 V_2 \circ a_3 V_3 \circ a_4 V_4 \circ a_5 V_5$$

यदि $(P_n x, S_n x) \in V_1, (P_n y, T_n y) \in V_2, (P_n x, T_n y) \in V_3,$

$(P_n y, S_n x) \in V_4$ और $(S_n x, T_n y) \in V_5,$

जहाँ $a_1 = a_1(x, y), a_2 = a_2(x, y), a_3 = a_3(x, y), a_4 = a_4(x, y)$

$$a_5 = a_5(x, y)$$

x व y के ऐसे ऋणोत्तर फलन हैं कि

$$(3.2) \quad 0 < \text{उच्चक}_{x,y} \in X^{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5} = h < 1.$$

यदि $P, S, T : X \rightarrow X$ क्रमशः $\{P_n\}, \{S_n\}$ व $\{T_n\}$ के बिंदुशः सीमा प्रतिचित्रण हों और z प्रतिचित्रणों P, S व T का एक उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु हो तब $z_n \rightarrow z$.

उपपत्ति. मान लें $V \in G$ मनमाना है तथा V का मिन्कोव्स्की छद्मदूरीक p है और x, y समष्टि X में हैं. मान लें

$$p(P_n x, S_n x) = s_1, p(P_n y, T_n y) = s_2, p(P_n x, T_n y) = s_3,$$

$$p(P_n y, S_n x) = s_4 \text{ और } p(S_n x, T_n y) = s_5 \text{ और } \epsilon > 0.$$

$$V = (y_n, T, x_n, S) \quad V = (y_n, T, x_n, S) \quad V = (y_n, T, x_n, S)$$

$$(y_n, T, x_n, S)$$

$$(y_n, T, x_n, S)$$

$$(y_n, T, x_n, S) = (y_n, T, x_n, S) = (y_n, T, x_n, S)$$

$$(y_n, T, x_n, S) = (y_n, T, x_n, S)$$

यदि V का मान (y_n, T, x_n, S) है तो

$$(3.2) \quad 0 < \text{मान } (y_n, T, x_n, S) < 1$$

यदि V का मान (y_n, T, x_n, S) है तो

यदि V का मान (y_n, T, x_n, S) है तो

$$(y_n, T, x_n, S)$$

यदि V का मान (y_n, T, x_n, S) है तो

यदि V का मान (y_n, T, x_n, S) है तो

$$(y_n, T, x_n, S) = (y_n, T, x_n, S)$$

$$(y_n, T, x_n, S) = (y_n, T, x_n, S)$$

तब

$$(P_n x, S_n x) \in V_{(p, s_1 + \epsilon)}, (P_n y, T_n y) \in V_{(p, s_2 + \epsilon)}$$

$$(P_n x, T_n y) \in V_{(p, s_3 + \epsilon)}, (P_n y, S_n x) \in V_{(p, s_4 + \epsilon)}$$

और

$$(S_n x, T_n y) \in V_{(p, s_5 + \epsilon)}.$$

इसलिए (3.1) से

$$(P_n x, P_n y)$$

$$\in a_1(s_1 + \epsilon)V_0 + a_2(s_2 + \epsilon)V_0 + a_3(s_3 + \epsilon)V_0 + a_4(s_4 + \epsilon)V_0$$

$$+ a_5(s_5 + \epsilon)V$$

अतः

$$p(P_n x, P_n y) < a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 + a_4 s_4 + a_5 s_5 + h\epsilon.$$

चूँकि $\epsilon > 0$ मनमाना है, अतः

$$(3.3) \quad p(P_n x, P_n y) \leq a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 + a_4 s_4 + a_5 s_5$$

$$\leq h \text{ अधिकतम } \{p(P_n x, S_n x), p(P_n y, T_n y), p(P_n x, T_n y), p(P_n y, S_n x), \\ p(S_n x, T_n y)\}.$$

अतः किसी n के लिए (3.3) से,

$$p(u_n, u) \leq p(P_n u, u) + p(P_n u_n, P_n u) \\ \leq p(P_n u, u) + h \text{ अधिकतम } \{p(P_n u, T_n u), p(u_n, T_n u), p(u_n, P_n u)\}.$$

अस्तु किसी n के लिए या तो

$$p(u_n, u) \leq p(P_n u, u) + hp(P_n u, T_n u) \\ \text{(A)} \quad \leq (1+h) p(P_n u, P_n u) + hp(T_n u, T_n u);$$

अथवा

$$p(u_n, u) \leq p(P_n u, u) + hp(u_n, T_n u) \\ \leq p(P_n u, u) + h[p(u_n, u) + p(u, T_n u)]$$

अर्थात्

$$\text{(B)} \quad (1-h) p(u_n, u) \leq p(P_n u, P_n u) + hp(T_n u, T_n u);$$

$\leq h$ अतः $p(p_n x, p_n x) \leq p(p_n y, p_n y) + p(p_n x, p_n y)$

$$p(p_n x, p_n y) \leq p(p_n x, p_n x) + p(p_n y, p_n y)$$

अतः $p(p_n x, p_n y) \leq p(p_n x, p_n x) + p(p_n y, p_n y)$

$$p(p_n x, p_n y) \leq p(p_n x, p_n x) + p(p_n y, p_n y)$$

$\leq h$ अतः $p(p_n x, p_n x) + p(p_n y, p_n y) \leq p(p_n x, p_n y) + p(p_n y, p_n x)$

अतः $p(p_n x, p_n y) \leq p(p_n x, p_n x) + p(p_n y, p_n y)$

$$p(p_n x, p_n y) \leq p(p_n x, p_n x) + p(p_n y, p_n y)$$

$$(A) \quad p(p_n x, p_n y) \leq p(p_n x, p_n x) + p(p_n y, p_n y)$$

अतः

$$p(p_n x, p_n y) \leq p(p_n x, p_n x) + p(p_n y, p_n y)$$

$$\leq p(p_n x, p_n y) + p(p_n y, p_n x)$$

अतः

$$(B) \quad (1 - h) p(p_n x, p_n y) \leq p(p_n x, p_n x) + p(p_n y, p_n y)$$

अथवा इसी प्रकार

$$(C) \quad (1 - h) p(u_n, u) \leq (1 + h) p(P_n u, Pu).$$

चूँकि $\{P_n\}$ व $\{T_n\}$ क्रमशः P और T को बिंदुशः अभिसरित होते हैं, इसलिए $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ और बिंदु u के लिए ऐसे धनात्मक पूर्णांक N_1 व N_2 अस्तित्व में आते हैं कि

$$p(P_n u, Pu) < \epsilon_1 \quad \text{सभी } n \geq N_1 \text{ के लिए}$$

$$\text{और} \quad p(T_n u, Tu) < \epsilon_2 \quad \text{सभी } n \geq N_2 \text{ के लिए,}$$

अब मान लें

$$N = \text{अधिकतम } \{N_1, N_2\} \text{ और } (\epsilon / M) = \text{अधिकतम } \{\epsilon_1, \epsilon_2\}$$

$$\text{जहाँ } M = \text{अधिकतम } \{(1 + 2h), (1 + h)/(1 - h)\}.$$

अतः (A) - (C) के प्रत्येक स्थिति में सभी $n \geq N$ के लिए

$$p(u_n, u) < \epsilon.$$

चूँकि V मनमाना है और समष्टि हाउसडोर्फ हैं, अतः $u_n \rightarrow u$.

मान ली जाए

$$(C) \quad (n - 1)p(n, n) + 1 \geq (n - 1)p(n, n) \quad (C)$$

यदि $n \geq 1$ है तो $(n - 1)p(n, n) + 1 \geq (n - 1)p(n, n)$ सत्य है।
 यदि $n = 0$ है तो $(n - 1)p(n, n) + 1 = 1 \geq 0 = (n - 1)p(n, n)$ सत्य है।
 अतः $(n - 1)p(n, n) + 1 \geq (n - 1)p(n, n)$ सभी n के लिए सत्य है।

मान ली जाए

$$p(n, n) < 1$$

मान ली जाए

$$p(n, n) < 1$$

मान ली जाए

$$n = 1 \text{ और } n = 2 \text{ के लिए } (n - 1)p(n, n) + 1 \geq (n - 1)p(n, n)$$

$$n = 1 \text{ के लिए } (1 - 1)p(1, 1) + 1 = 1 \geq 0 = (1 - 1)p(1, 1)$$

$$(A) - (C) \quad (A) - (C) \quad (A) - (C)$$

$$p(n, n) < 1$$

मान ली जाए $n \geq 1$ है तो $(n - 1)p(n, n) + 1 \geq (n - 1)p(n, n)$ सत्य है।

प्रमेय 4. मान लें P_n, S_n व T_n हाउसडोर्फ सम परिवेश समष्टि X पर $z_n (n=1, 2, \dots)$ उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु वाले प्रतिचित्रण हैं तथा $V_i \in G (i = 1, 2, \dots, 5)$ और $x, y \in X$ के लिए z उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु वाले प्रतिचित्रण $P, S, T : X \rightarrow X$ इस प्रकार हैं कि

$$(4.1) \quad (P_x, P_y) \in a_1 V_1 \circ a_2 V_2 \circ a_3 V_3 \circ a_4 V_4 \circ a_5 V_5,$$

$$\text{यदि} \quad (P_x, S_x) \in V_1, (P_y, T_y) \in V_2, (P_x, T_y) \in V_3,$$

$$(P_y, S_x) \in V_4 \quad \text{और} \quad (S_x, T_y) \in V_5,$$

जहाँ सभी a_i शर्त (3.2) को संतुष्ट करते हैं. यदि $\{P_n\}, \{S_n\}$ व $\{T_n\}$ क्रमशः P, S व T को एक समान अभिसरित होते हों तब

$$z_n \rightarrow z.$$

उपपत्ति. मान लें $v \in G$ मनमाना है और v का मिन्कोव्स्की छद्मदूरीक p है. मान लें $x, y \in X$. तब प्रमेय 3 की उपपत्ति का अनुसरण करके

$$(4.2) \quad p(P_x, P_y)$$

माना 4. मान है p_n, q_n, r_n, s_n, t_n का समुच्चय X ।
 प्रत्येक $n \in \mathbb{N}$ के लिए $s_n(n-1, 2, \dots, 5)$ समुच्चय X का
 $V_1 = \{x \in X : (1, 2, \dots, 5) \in s_n(x)\}$ और $V_2 = \{x \in X : (2, \dots, 5) \in s_n(x)\}$ का
 समुच्चय X का V_1 और V_2 का प्रतिच्छेद $V_1 \cap V_2$ का समुच्चय X का
 समुच्चय X का V_1 और V_2 का प्रतिच्छेद $V_1 \cap V_2$ का समुच्चय X का

$$(4.1) \quad (p_n, q_n) \in V_1 \cap V_2, (p_n, q_n) \in V_1 \cap V_2, (p_n, q_n) \in V_1 \cap V_2, (p_n, q_n) \in V_1 \cap V_2$$

$$(p_n, q_n) \in V_1, (p_n, q_n) \in V_2, (p_n, q_n) \in V_1 \cap V_2, (p_n, q_n) \in V_1 \cap V_2$$

$$(p_n, q_n) \in V_1, (p_n, q_n) \in V_2, (p_n, q_n) \in V_1 \cap V_2, (p_n, q_n) \in V_1 \cap V_2$$

माना 5. मान है p_n, q_n, r_n, s_n, t_n का समुच्चय X ।
 प्रत्येक $n \in \mathbb{N}$ के लिए $s_n(n-1, 2, \dots, 5)$ समुच्चय X का
 $V_1 = \{x \in X : (1, 2, \dots, 5) \in s_n(x)\}$ और $V_2 = \{x \in X : (2, \dots, 5) \in s_n(x)\}$ का
 समुच्चय X का V_1 और V_2 का प्रतिच्छेद $V_1 \cap V_2$ का समुच्चय X का

$$s_n = \{x \in X : (1, 2, \dots, 5) \in s_n(x)\}$$

माना 6. मान है p_n, q_n, r_n, s_n, t_n का समुच्चय X ।
 प्रत्येक $n \in \mathbb{N}$ के लिए $s_n(n-1, 2, \dots, 5)$ समुच्चय X का
 $V_1 = \{x \in X : (1, 2, \dots, 5) \in s_n(x)\}$ और $V_2 = \{x \in X : (2, \dots, 5) \in s_n(x)\}$ का
 समुच्चय X का V_1 और V_2 का प्रतिच्छेद $V_1 \cap V_2$ का समुच्चय X का

$$(4.2) \quad (p_n, q_n) \in V_1, (p_n, q_n) \in V_2, (p_n, q_n) \in V_1 \cap V_2, (p_n, q_n) \in V_1 \cap V_2$$

$$\leq h \text{ अधिकतम } \{p(Px, Sx), p(Py, Ty), p(Px, Ty), p(Py, Sx), \\ p(Sx, Ty)\}$$

सिद्ध किया जा सकता है.

उपपत्ति का शेषांश [123, प्रमेय 1] की उपपत्ति का अनुसरण करके पूरा किया जा सकता है.

प्रमेय 5. यदि प्रमेय 3 की शर्त (3.1) के स्थान पर

$$(5.1) \text{ जहाँ } (P_n x, T_n x) \in V_1, (S_n y, T_n y) \in V_2, (P_n x, T_n y) \in V_3,$$

$$(S_n y, T_n x) \in V_4 \text{ और } (T_n x, T_n y) \in V_5;$$

लें तब भी प्रमेय 3 सत्य रहती है.

उपपत्ति. मान लें $V \in G$ मनमाना है और V का मिन्कोव्स्की छद्मदूरीक p है. मान लें $x, y \in X$. तब, प्रमेय 3 की उपपत्ति का अनुसरण करते हुए हम प्राप्त करते हैं कि

$$(5.2) \quad p(P_n x, S_n y)$$

$$\leq h \text{ अधिकतम } \{p(P_n x, T_n x), p(S_n y, T_n y), p(P_n x, T_n y), \\ p(S_n y, T_n x), p(T_n x, T_n y)\}.$$

2.1. $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ को माना है कि

$$(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$$

है। माना है कि

2.2. $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ को माना है कि

है। माना है कि

2.3. $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ को माना है कि

$$(2.1) \text{ माना है कि } (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$$

$$(2.2) \text{ माना है कि } (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$$

2.3. $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ को माना है कि

2.4. $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ को माना है कि

2.5. $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ को माना है कि

है। माना है कि

$$(2.5) \text{ माना है कि } (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$$

$$(2.6) \text{ माना है कि } (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$$

$$(2.7) \text{ माना है कि } (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$$

किसी n के लिए (5.2) से,

$$\begin{aligned}
 & p(u_n, u) \\
 & \leq p(P_n u_n, S_n u) + p(S_n u, u) \\
 & \leq h \text{ अधिकतम } \{p(S_n u, T_n u), p(u_n, T_n u), p(S_n u, u_n)\} \\
 & \quad + p(S_n u, u).
 \end{aligned}$$

अतः किसी n के लिए या तो

$$\begin{aligned}
 & p(u_n, u) \\
 & \leq h \quad p(S_n u, T_n u) + p(S_n u, u) \\
 & \leq h [p(S_n u, S u) + p(T_n u, T u)] + p(S_n u, u) \\
 \text{(i)} \quad & \leq (1 + h) p(S_n u, S u) + h p(T_n u, T u);
 \end{aligned}$$

अथवा

$$p(u_n, u)$$

किं न के लिये (2.2) है

$$p(u, v)$$

$$p(p_n u, s_n u) + p(s_n u, u)$$

$$p(p_n u, s_n u) + p(s_n u, u) + p(p_n u, T_n u) + p(T_n u, p_n u)$$

$$+ p(s_n u, u)$$

अतः किं न के लिये न के लिये

$$p(u, v)$$

$$p(p_n u, T_n u) + p(s_n u, u)$$

$$p(p_n u, s_n u) + p(T_n u, T_n u) + p(s_n u, u)$$

$$(1) \quad p(p_n u, s_n u) + p(T_n u, T_n u) + p(s_n u, u)$$

$$p(u, v)$$

$$\leq hp(u_n, T_n u) + p(S_n u, u)$$

$$\leq h[p(u_n, u) + p(T_n u, u)] + p(S_n u, u)$$

अर्थात्

$$(ii) \quad (1 - h) p(u_n, u)$$

$$\leq hp(T_n u, Tu) + p(S_n u, Su);$$

अथवा इसी प्रकार

$$(iii) \quad (1 - h) p(u_n, u) \leq (1 + h) p(S_n u, Su).$$

चूँकि $\{S_n\}$ व $\{T_n\}$ क्रमशः S व T को बिंदुशः अभिसरित होते हैं, इसलिए $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ और बिंदु u के लिए ऐसे धनात्मक पूर्णांक N_1 व N_2 अस्तित्व में आते हैं कि

$$p(S_n u, Su) < \epsilon_1 \text{ सभी } n \geq N_1 \text{ के लिए}$$

$$\text{और } p(T_n u, Tu) < \epsilon_2 \text{ सभी } n \geq N_2 \text{ के लिए .}$$

मान लें

$$N = \text{अधिकतम } \{N_1, N_2\} \quad \text{और} \quad (\epsilon/M) = \text{अधिकतम } (\epsilon_1, \epsilon_2).$$

$$p(u_n, T u_n) + p(u_n, S u_n)$$

$$p(u_n, T u_n) + p(u_n, S u_n) + p(u_n, T u_n) + p(u_n, S u_n)$$

है।

$$(1 - n) p(u_n, S u_n)$$

(11)

$$p(u_n, T u_n) + p(u_n, S u_n)$$

अतः हमें प्राप्त है

$$(11) \quad (1 - n) p(u_n, S u_n) + p(u_n, T u_n) + p(u_n, S u_n)$$

है। (2) यदि $T u_n = S u_n$ हो तो हमें प्राप्त है

इस प्रकार $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2 < 0$ और $\epsilon_1 = 0$ हो तो हमें प्राप्त है

अतः हमें प्राप्त है

$$p(u_n, S u_n) < \epsilon_1$$

$$p(u_n, T u_n) < \epsilon_2$$

है।

जहाँ $M = \text{अधिकतम } \{(1+2h), (1+h)/(1-h)\},$

अतः (i)-(iii) के प्रत्येक स्थिति में, सभी $n > N$ के लिए $p(u_n, u) < \epsilon$.

अतः सभी $n (n > N)$ के लिए $(u_n, u) \in V$. चूँकि V मनमाना हाउसडोर्फ समष्टि है अतः

$$u_n \rightarrow u.$$

प्रमेय 6. यदि प्रमेय 4 की शर्त (4.1) के स्थान पर

$$(6.1) \quad (P_x, S_y) \in a_1 V_1 \circ a_2 V_2 \circ a_3 V_3 \circ a_4 V_4 \circ a_5 V_5,$$

$$\text{यदि } (P_x, T_x) \in V_1, (S_y, T_y) \in V_2, (P_x, T_y) \in V_3,$$

$$(S_y, T_x) \in V_4 \quad \text{और} \quad (T_x, T_y) \in V_5; \text{ लें}$$

प्रमेय 4 तब भी सत्य रहती है.

(7.1)

उपपत्ति. मान लें $V \in G$ मनमाना है और V का मिन्कोव्स्की छद्मदूरीक p है. मान लें $x, y \in X$. तब प्रमेय 3 की उपपत्ति का अनुसरण करते हुए हम प्राप्त करते हैं कि

$$p(P_x, S_y)$$

$$\leq h \text{ अधिकतम } \{p(P_x, T_x), p(S_y, T_y), p(P_x, T_y), p(S_y, T_x), p(T_x, T_y)\}.$$

उपपत्ति का शेषांश [130, प्रमेय 1] की उपपत्ति के अनुसार पूरा किया जा सकता है.

$$M = \sum_{i=1}^n (1+2n_i) \cdot (1+n_i) \cdot (1-n_i)$$

सम: (1)-(11) के मान निकाले जाते हैं, जहाँ $n_i > 0$ है, तब $n_i < 1$ है।

सम: यदि $n_i > 0$ के लिए $(n_i) \in V$, तब V का मान निकाला जाता है।

$$n_i = 0$$

सम: 0. यदि $n_i = 1$ के लिए $(1) \in V$ है तब V का मान निकाला जाता है।

$$(0.1) \quad (P_X, T_X) \in V_1 \vee (P_X, T_X) \in V_2 \vee (P_X, T_X) \in V_3 \vee (P_X, T_X) \in V_4 \vee (P_X, T_X) \in V_5$$

$$(P_X, T_X) \in V_1 \vee (P_X, T_X) \in V_2 \vee (P_X, T_X) \in V_3 \vee (P_X, T_X) \in V_4 \vee (P_X, T_X) \in V_5$$

$$(P_X, T_X) \in V_1 \vee (P_X, T_X) \in V_2 \vee (P_X, T_X) \in V_3 \vee (P_X, T_X) \in V_4 \vee (P_X, T_X) \in V_5$$

सम: 4 तब भी मान निकाला जाता है।

उदाहरण: मान लें $V = \{0, 1\}$ का मान निकाला जाता है।

यदि $n_i = 0$ है तब V का मान निकाला जाता है।

यदि $n_i = 1$ है तब V का मान निकाला जाता है।

$$(P_X, T_X) \in V$$

$$(P_X, T_X) \in V_1 \vee (P_X, T_X) \in V_2 \vee (P_X, T_X) \in V_3 \vee (P_X, T_X) \in V_4 \vee (P_X, T_X) \in V_5$$

सम: यदि $n_i = 0$ है तब V का मान निकाला जाता है।

यह जिज्ञासा स्वभाविक है कि तीन प्रतिचित्रणों $P, S, T : X \rightarrow X$ के उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु के अस्तित्व के लिए पर्याप्त प्रतिबंध क्या है. निम्न दो प्रमेयों में इस प्रश्न का उत्तर निहित है.

प्रमेय 7. मान लें अनुक्रमतः पूर्ण हाउसडोर्फ सम परिवेश समष्टि X पर स्व-प्रतिचित्रण P, S व T इस प्रकार हैं कि $P(X) \subseteq S(X) \cap T(X)$, $PS = SP$ और $PT = TP$. मान लें $V_i \in G (i=1, 2, \dots, 5)$ व $x, y \in X$ तथा $a_3 = a_4$ के लिए शर्तें (4.1) व (3.2) संतुष्ट होती हैं. यदि S और T संतत है तब P, S व T के अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु का अस्तित्व होता है.

उपपत्ति. मान लें $V \in G$ मनमाना है और V का मिन्कोव्स्की छद्मदूरीक p है. मान लें $x, y \in X$. प्रमेय 3 की उपपत्ति का अनुसरण करते हुए

(7.1)

$$p(Px, Py)$$

$$\leq h \text{ अधिकतम } \{p(Px, Sx), p(Py, Ty), \frac{1}{2}[p(Px, Ty) + p(Py, Sx)],$$

$$p(Sx, Ty)\}$$

प्राप्त होता है.

समष्टि X में कोई मनमाना बिंदु x लें. चूंकि $S(X)$ व $T(X)$ में $P(X)$ अन्तर्विष्ट है, इसलिए X में एक अनुक्रम $\{x_n\}$ निम्नप्रकार पारिभाषित कर सकते हैं :

हमारे पास $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ है। हमें X के n तत्वों को n स्थानों पर रखना है।
 हमें X के n तत्वों को n स्थानों पर रखना है।
 हमें X के n तत्वों को n स्थानों पर रखना है।

हम X के n तत्वों को n स्थानों पर रखना है।
 हमें X के n तत्वों को n स्थानों पर रखना है।
 हमें X के n तत्वों को n स्थानों पर रखना है।
 हमें X के n तत्वों को n स्थानों पर रखना है।
 हमें X के n तत्वों को n स्थानों पर रखना है।

हमारे पास $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ है। हमें X के n तत्वों को n स्थानों पर रखना है।
 हमें X के n तत्वों को n स्थानों पर रखना है।
 हमें X के n तत्वों को n स्थानों पर रखना है।

$$(1.1) \quad p(x_1, x_2) = p(x_2, x_1)$$

$$p(x_1, x_2) = p(x_2, x_1) + p(x_1, x_3) + p(x_2, x_3) + \dots + p(x_1, x_n) + p(x_2, x_n) + \dots + p(x_{n-1}, x_n)$$

हमारे पास $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ है। हमें X के n तत्वों को n स्थानों पर रखना है।
 हमें X के n तत्वों को n स्थानों पर रखना है।
 हमें X के n तत्वों को n स्थानों पर रखना है।

हमारे पास $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ है। हमें X के n तत्वों को n स्थानों पर रखना है।
 हमें X के n तत्वों को n स्थानों पर रखना है।
 हमें X के n तत्वों को n स्थानों पर रखना है।

$$Sx_{2n-1} = Px_{2n-2}, Tx_{2n} = Px_{2n-1}, n = 1, 2, \dots,$$

अब (7.1) से

$$p(Px_{2n}, Px_{2n-1}) = p(Px_{2n-1}, Px_{2n})$$

$$\leq h \text{ अधिकतम } \{p(Px_{2n-1}, Px_{2n-2}), (\frac{1}{2}) p(Px_{2n}, Px_{2n-2})\}.$$

इसलिए

$$p(Px_{2n}, Px_{2n-1}) \leq hp(Px_{2n-1}, Px_{2n-2}).$$

इसी प्रकार

$$p(Px_{2n+1}, Px_{2n}) \leq hp(Px_{2n}, Px_{2n-1}).$$

इन दोनों संबंधों के आलोक में

$$p(Px_{n+1}, Px_n) \leq hp(Px_n, Px_{n-1}).$$

इसलिए $\{Px_n\}$ एक कौशी अनुक्रम है और किसी बिंदु z पर अभिसरित होता है.

प्रतिचित्रणों S और T की संततता के कारण $SSx_{2n+1} \rightarrow Sz$ और

$TTx_{2n} \rightarrow Tz$. चूंकि प्रतिचित्रण P दोनों प्रतिचित्रणों S और T के साथ क्रमविनिमयी है. इसलिए

$$PSx_{2n+1} = SPx_{2n+1} + Sz \text{ और } PTx_{2n} = TPx_{2n} + Tz .$$

अस्तु (7.1) से

$$\begin{aligned} & p(PSx_{2n+1}, PTx_{2n}) \\ & \leq h \text{ अधिकतम } \{p(PSx_{2n+1}, SSx_{2n+1}), p(PTx_{2n}, TTx_{2n}), \\ & (\frac{1}{2})[p(PSx_{2n+1}, TTx_{2n}) + p(PTx_{2n}, SSx_{2n+1})], p(SSx_{2n+1}, TTx_{2n})\}. \end{aligned}$$

इसमें n को अनंत लेने पर

$$p(Sz, Tz) \leq hp(Sz, Tz),$$

अतः $p(Sz, Tz) = 0$. इसलिए G के प्रत्येक v के लिए $(Sz, Tz) \in v$

और $Sz = Tz$.

इसी प्रकार (7.1) में $x = z$ और $y = Tx_{2n}$ रखने व n को अनंत लेने पर तथा $Sz = Tz$ का प्रयोग करने पर हम G के प्रत्येक v के लिए $(Pz, Tz) \in v$ और $p(Pz, Tz) = 0$ प्राप्त करते हैं. अतः

$$p_{2n+1} = p_{2n+1} + p_{2n} = p_{2n} + p_{2n} = 2p_{2n}$$

संदर्भ (1.7) में

$$p(p_{2n+1}, p_{2n})$$

$$p(p_{2n+1}, p_{2n}) = p(p_{2n+1}, p_{2n}) + p(p_{2n+1}, p_{2n}) = 2p(p_{2n+1}, p_{2n})$$

$$p(p_{2n+1}, p_{2n}) = p(p_{2n+1}, p_{2n}) + p(p_{2n+1}, p_{2n}) = 2p(p_{2n+1}, p_{2n})$$

यहाँ n की संख्या

$$p(p_{2n}, p_{2n}) = p(p_{2n}, p_{2n}) + p(p_{2n}, p_{2n}) = 2p(p_{2n}, p_{2n})$$

यहाँ $p(p_{2n}, p_{2n}) = 0$, यहाँ p के लिए $p(p_{2n}, p_{2n}) = 0$

$$p_{2n} = p_{2n}$$

यहाँ $p_{2n} = p_{2n}$ के लिए $p_{2n} = p_{2n}$

यहाँ $p_{2n} = p_{2n}$ के लिए $p_{2n} = p_{2n}$

यहाँ $p_{2n} = p_{2n}$ के लिए $p_{2n} = p_{2n}$

यहाँ

$$Sz = Tz = Pz$$

पुनः (7.1) में $x = x_{2n+1}$ और $y=z$ रखने व n को अनंत लेने पर G के प्रत्येक V के लिए $p(z, pz)=0$ और $(z, Pz) \in V$ प्राप्त होता है. इससे $z=Pz$ सिद्ध होता है. इसलिए z प्रतिचित्रणों P, S और T का उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु है. z अद्वितीय है यह सिद्ध करना आसान है.

प्रमेय 8. मान लें अनुक्रमतः पूर्ण हाउसडोर्फ सम परिवेश समष्टि X पर स्व-प्रतिचित्रण P, S व T इस प्रकार हैं कि $P(X) \cup S(X) \subseteq T(X)$, $PT = TP$ और $ST=TS$. मान लें $V_i \in G (i=1, 2, \dots, 5)$ व $x, y \in X$ तथा $a_3 = a_4$ के लिए शर्तें (6.1) और (3.2) संतुष्ट होती है. यदि T संतत है तब P, S और T के अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु का अस्तित्व होता है.

उपपत्ति. मान लें $V \in G$ मनमाना है और V का मिन्कोव्स्की छद्मदूरीक p है. मान लें $x, y \in X$. प्रमेय 3 की उपपत्ति का अनुसरण करके

$$p(Px, Sy)$$

$$\leq h \text{ अधिकतम } \{p(Px, Tx), p(Sy, Ty), (\frac{1}{2})[p(Px, Ty) + p(Sy, Tx)], p(Tx, Ty)\}$$

$$z^2 = x^2 + y^2$$

यहाँ (1.1) में $x = z$ और $y = z$ रखने पर हमें

के लिए V के लिए $p(z, z) = 0$ और $p(z, z) = V$

हमारे पास है। इससे हमें $z = p$ मिलता है।

और T का समीकरण $z = p$ है।

अब 8. भाग में हमने देखा था कि

हमारे पास है कि $p(x) \leq p(x) \leq p(x)$

हमारे पास है $p(x) = p(x) = p(x)$

हमारे पास है $p(x) = p(x) = p(x)$

हमारे पास है $p(x) = p(x) = p(x)$

हमारे पास है $p(x) = p(x) = p(x)$

हमारे पास है $p(x) = p(x) = p(x)$

$$p(x, y)$$

$$p(x, y) = p(x, y) = p(x, y)$$

$$p(x, y) = p(x, y) = p(x, y)$$

सिद्ध किया जा सकता है. उपपत्ति का शेषांश [133] का अनुसरण कर पूरा किया जा सकता है.

4. टिप्पणियां

4.1 यदि हम (3.1) में $S_n = T_n$ या (5.1) में $P_n = S_n$ लें और (4.1) में $S = T$ या (6.1) में $P = S$ लें तब क्रमशः शर्तें (1.1) और (2.1) प्राप्त की जा सकती हैं. प्रतिचित्रणों के अनुक्रम संबंधित अनेक परिणाम अभिसरण प्रमेयों 3 - 6 की विशेष स्थितिके रूप में प्राप्त किये जा सकते हैं. उदाहरणार्थ $S_n x = T_n x$ ($x \in X$) के साथ इस अध्याय की प्रमेयों 3 व 4 से रोज़ड्स [94, प्रमेय 2 - 3] के परिणाम. इस अध्याय की प्रमेयों 5 और 6 से भी $P_n = S_n$ और $T_n x = x, x \in X$ लेकर विशेष स्थिति के रूप में उपरोक्त परिणाम प्राप्त किये जा सकते हैं.

4.2 $Tx = x$ ($x \in X$) के साथ इस अध्याय की प्रमेय 8 की विशेष स्थिति के रूप में रोज़ड्स [94] की प्रमेय 4 को प्राप्त किया जा सकता है.

4.3 यदि प्रमेय 7 में समष्टि X को पूर्ण न मानें और $S(X) \cap T(X)$ को पूर्ण हाउसडोर्फ़ उपसमष्टि मान लें तो प्रतिचित्रणों S व T पर से सांतत्य प्रतिबंध हटाया जा सकता है. इसी प्रकार X के स्थान पर यदि $T(X)$ को पूर्ण हाउसडोर्फ़ उपसमष्टि मान लें तो प्रमेय 8 से T पर लगा सांतत्य प्रतिबंध हटाया जा सकता है.

षष्ठ अध्याय

2-दूरीक समष्टियों में प्रतिचित्रणों के अनुक्रम का

अभिसरण एवं उनके उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु

मान लें $P, Q, S, T, P_n, Q_n, S_n, T_n$ ($n = 1, 2, \dots$)

2-दूरीक समष्टि पर प्रतिचित्रण हैं तथा u प्रतिचित्रणों P, Q, S, T का उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु है और u_n प्रतिचित्रणों

P_n, Q_n, S_n, T_n ($n = 1, 2, \dots$) का स्थिर बिंदु है. इस अध्याय में उन शर्तों का अध्ययन किया गया है जिनके अधीन प्रतिचित्रण अनुक्रमों $\{P_n\}, \{Q_n\}, \{S_n\}$, और $\{T_n\}$ के क्रमशः P, Q, S और T को (बिंदुशः अथवा एकसमान रूप से) अभिसरित होने की स्थिति में स्थिर बिंदु - अनुक्रम $\{u_n\}$ बिंदु u को अभिसरित होता है.

यह अध्याय निम्न अनुभागों में विभक्त है -

1. प्रारंभिकी
2. परिणाम
3. टिप्पणियाँ

1. प्रारंभिकी

मान लें M एक पूर्ण दूरीक (1 - दूरीक) समष्टि है. M में स्व-प्रतिचित्रणों का अनुक्रम $\{f_n\}$ इस प्रकार है कि -

1. प्रत्येक पूर्णांक n के लिए f_n संकुचनीय प्रतिचित्रण है;
2. प्रतिचित्रण अनुक्रम $\{f_n\}$ संकुचनीय प्रतिचित्रण f पर एक समान रूप से अभिसरित होता है.

ऐसी स्थिति में प्रत्येक $n=0, 1, 2, \dots$, के लिए अद्वितीय स्थिर बिंदु u_n का इस प्रकार अस्तित्व होता है कि

$$f_n u_n = u_n.$$

अब अनुक्रम $\{u_n\}$ के u पर अभिसरित होने के विषय में जिज्ञासा स्वाभाविक है. इस दिशा में प्रथम परिणाम (जैसा कि पिछले अध्याय में अनुस्यूत है) प्रो० एफ० एफ० बोन्साल [5] ने संकुचन प्रतिचित्रण f_n के प्रत्येक $n = 0, 1, 2, \dots$, तथा $k \in (0, 1)$ के लिए शर्त $d(f_n u, f_n v) \leq k d(u, v)$, संतुष्ट करने की स्थिति में प्राप्त किया है. कालांतर में इस प्रकार के अध्ययन में पर्याप्त प्रगति हुई एवं अनेकों परिमार्जित परिणाम आए हैं (उदाहरणार्थ देखें [3], [48], [56], [66], [68], [79], [95], [114], [115], [123], [125], [130], [131], [133] और [136]).

2-दूरीक समष्टि पर स्व-प्रतिचित्रणों के अनुक्रम के अभिसरण तथा उनके उभयनिष्ठ स्थिर बिंदुओं के अभिसरण संबंधित स्थिर बिंदु प्रमेय हाल ही में खान [56],

विषयसूची

१. म. १. प्रथम (अध्याय - १) कर्तव्य के रूप में म. १. नाम

२. म. १. नाम (१) प्रथम (१) प्रथम (१) प्रथम (१) प्रथम (१)

३. म. १. नाम (१) प्रथम (१) प्रथम (१) प्रथम (१) प्रथम (१)

४. म. १. नाम (१) प्रथम (१) प्रथम (१) प्रथम (१) प्रथम (१)

५. म. १. नाम (१) प्रथम (१) प्रथम (१) प्रथम (१) प्रथम (१)

६. म. १. नाम (१) प्रथम (१) प्रथम (१) प्रथम (१) प्रथम (१)

७. म. १. नाम (१) प्रथम (१) प्रथम (१) प्रथम (१) प्रथम (१)

$$n^2 = n^2 + n^2$$

८. म. १. नाम (१) प्रथम (१) प्रथम (१) प्रथम (१) प्रथम (१)

९. म. १. नाम (१) प्रथम (१) प्रथम (१) प्रथम (१) प्रथम (१)

१०. म. १. नाम (१) प्रथम (१) प्रथम (१) प्रथम (१) प्रथम (१)

११. म. १. नाम (१) प्रथम (१) प्रथम (१) प्रथम (१) प्रथम (१)

१२. म. १. नाम (१) प्रथम (१) प्रथम (१) प्रथम (१) प्रथम (१)

१३. म. १. नाम (१) प्रथम (१) प्रथम (१) प्रथम (१) प्रथम (१)

१४. म. १. नाम (१) प्रथम (१) प्रथम (१) प्रथम (१) प्रथम (१)

१५. म. १. नाम (१) प्रथम (१) प्रथम (१) प्रथम (१) प्रथम (१)

१६. म. १. नाम (१) प्रथम (१) प्रथम (१) प्रथम (१) प्रथम (१)

१७. म. १. नाम (१) प्रथम (१) प्रथम (१) प्रथम (१) प्रथम (१)

रोअड्स [95] , सिंह [115], सिंह-राम [131] व [133] तथा अन्यो द्वारा प्राप्त किए गए हैं. वस्तुतः खान [56] ने 2-दूरीक समष्टि पर दो स्व-प्रतिचित्रण अनुक्रमों के लिए अभिसरण प्रमेय प्राप्त किया है तथा सिंह-राम [131] ने 2-दूरीक समष्टि पर तीन स्व-प्रतिचित्रणों द्वारा संतुष्ट होने वाली दो प्रकार के प्रतिचित्रण शर्तों के अधीन अभिसरण संबंधी परिणाम प्राप्त किए हैं (इस अध्याय के अंतिम अनुभाग में टिप्पणियाँ देखें). आगामी अनुभाग में इस प्रकार के अन्वेषण को आगे बढ़ाया गया है. वस्तुतः 2-दूरीक समष्टि पर चार प्रतिचित्रण अनुक्रमों के (बिंदुशः अथवा एक समान रूप से) अभिसरित होने की स्थिति में अभिसरण संबंधी स्थिर बिंदु प्रमेय प्राप्त किये गये हैं.

2. परिणाम

इस एवं अंतिम अनुभाग हेतु मान लें (X, d) एक 2-दूरीक समष्टि है तथा P_n, Q_n, S_n व T_n ($n = 1, 2, \dots$) तथा P, Q, S, T समष्टि X पर प्रतिचित्रण है. हमारा प्रथम परिणाम निम्नवत् है :

प्रमेय 1. मान लें 2-दूरीक समष्टि X पर P_n, Q_n, S_n , और T_n स्व-प्रतिचित्रण हैं और u_n ($n=1, 2, \dots$) उनका उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु है. मान लें अनुक्रम $\{P_n\}, \{Q_n\}, \{S_n\}$ और $\{T_n\}$ X में क्रमशः स्व-प्रतिचित्रणों P, Q, S और T पर एक समान रूप से अभिसरित होते हैं. यदि u प्रतिचित्रणों P, Q, S और T का उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु हो तथा

$$(1) \quad d(Px, Qy, a)$$

$$\leq h \text{ अधिकतम } \{d(Sx, Ty, a), d(Px, Sx, a), d(Qy, Ty, a),$$

$$d(Px, Ty, a), d(Qy, Sx, a)\}$$

X के समस्त x, y, a के लिए, जबकि $h \in (0, 1)$ संतुष्ट हो तब,
 $u_n \rightarrow u$.

उपपत्ति. नियतांक $\epsilon_i > 0, i=1, 2$ लें. चूंकि X पर $\{P_n\}$ और $\{S_n\}$ क्रमशः P और S पर एक समान रूप से अभिसरित होते हैं अतः धन पूर्णांक N_1 व N_2 इस प्रकार अस्तित्व में हैं कि X के समस्त a, x के लिए

$$d(P_n x, Px, a) < \epsilon_1 \quad \text{समस्त } n \geq N_1 \text{ के लिए}$$

तथा

$$d(S_n x, Sx, a) < \epsilon_2 \quad \text{समस्त } n \geq N_2 \text{ के लिए}$$

प्राप्त होता है . अब N, M तथा ϵ इस प्रकार लें कि

$$N = \text{अधिकतम } \{N_1, N_2\}$$

और

$$(\epsilon/M) = \text{अधिकतम } \{\epsilon_1, \epsilon_2\}$$

(1)

$$q(x_1, x_2, x_3)$$

$$q(x_1, x_2, x_3) = q(x_1, x_2, x_3) + q(x_1, x_2, x_3) + \dots$$

$$q(x_1, x_2, x_3) = q(x_1, x_2, x_3) + q(x_1, x_2, x_3) + \dots$$

Let x_1, x_2, x_3 be the coordinates of the point P in the space.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$$

Let x_1, x_2, x_3 be the coordinates of the point P in the space. Let r be the radius of the sphere. Then the equation of the sphere is $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$.

$$q(x_1, x_2, x_3) = q(x_1, x_2, x_3) + q(x_1, x_2, x_3) + \dots$$

Let

$$q(x_1, x_2, x_3) = q(x_1, x_2, x_3) + q(x_1, x_2, x_3) + \dots$$

Let x_1, x_2, x_3 be the coordinates of the point P in the space. Let r be the radius of the sphere. Then the equation of the sphere is $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$.

$$q(x_1, x_2, x_3) = q(x_1, x_2, x_3) + q(x_1, x_2, x_3) + \dots$$

$$q(x_1, x_2, x_3) = q(x_1, x_2, x_3) + q(x_1, x_2, x_3) + \dots$$

Let

जहाँ $M = \text{अधिकतम } \{(2+2h) / (1-h), (2+3h)\}.$

n के किसी भी मान के लिए

$$d(u_n, u, a)$$

$$\leq d(Pu_n, Qu, a) + d(u_n, Pu_n, a) + d(u_n, u, Pu_n)$$

$$\leq h \text{ अधिकतम } \{ d(Su_n, Tu, a), d(Pu_n, Su_n, a),$$

$$d(Pu_n, Tu, a), d(Qu, Su_n, a) \} + d(u_n, Pu_n, a) + d(u_n, u, Pu_n).$$

इसलिए X के प्रत्येक a के लिए तथा $n \geq N$ के लिए या तो

$$d(u_n, u, a)$$

$$< h d(Su_n, Tu, a) + 2 \epsilon / M$$

$$\leq h [d(S_n u_n, Su_n, a) + d(u_n, u, a)]$$

$$+ d(S_n u_n, Su_n, a) + 2 \epsilon / M$$

अर्थात्

$$(A) \quad (1-h) d(u_n, u, a) < (2+2h) \epsilon / M ;$$

या

जहाँ $M = \text{समकालीन } ((2+2h) \setminus (1-h), (2+2h))$

n के किसी भी भाग के लिए

$$d(u_n, v, a)$$

$$\leq d(pu_n, qu, a) + d(u_n, pu_n, a) + d(u_n, pu_n, a)$$

$$\leq n \text{ समकालीन } [d(su_n, tu, a), d(pu_n, su_n, a)]$$

$$d(pu_n, tu, a), d(qu, su_n, a) + d(u_n, pu_n, a) + d(u_n, pu_n, a)$$

इसलिए x के शक्ति a के लिए $n > n$ के लिए n के लिए

$$d(u_n, v, a)$$

$$> \text{hd}(qu_n, tu, a) + 2 \in \mathbb{N}$$

$$\leq d(pu_n, su_n, a) + d(u_n, pu_n, a)$$

$$+ d(su_n, tu, a) + 2 \in \mathbb{N}$$

प्राप्त

$$(A) \quad (1-h) \leq d(u_n, v, a) \leq (2+2h) \in \mathbb{N}$$

$$d(u_n, u, a)$$

$$< hd(Pu_n, Su_n; a) + 2\epsilon/M$$

$$\leq h[d(P_n u_n, Pu_n, a) + d(S_n u_n, Su_n, a)$$

$$+ d(P_n u_n, Pu_n, Su_n)] + 2\epsilon/M$$

$$(B) \quad < (2+3h) \epsilon/M;$$

$$(D) \quad (1-h)d(u_n, u, a) < (2+2h) \epsilon/M$$

या

इस प्रकार (A)-(D) प्रत्येक स्थिति में X के प्रत्येक a के लिए तब समस्त $n > N$ के लिए

$$d(u_n, u, a)$$

$$< hd(Pu_n, u, a) + 2\epsilon/M$$

$$\leq h[d(P_n u_n, Pu_n, a) + d(P_n u_n, Pu_n, u) + d(u_n, u, a)] + 2\epsilon/M$$

अर्थात्

$$(C) \quad (1-h)d(u_n, u, a) < (2+2h) \epsilon/M;$$

या

$$d(u_n, v, a)$$

$$< hg(pu_n, su_n, a) + 2\epsilon \sqrt{M}$$

$$< h[d(pu_n, pu_n, a) + d(su_n, su_n, a)]$$

$$+ d(pu_n, pu_n, su_n) + 2\epsilon \sqrt{M}$$

$$(B) \quad < (2+3h)\epsilon \sqrt{M}$$

$$d(u_n, v, a)$$

$$< hg(pu_n, v, a) + 2\epsilon \sqrt{M}$$

$$< h[d(pu_n, pu_n, a) + d(pu_n, pu_n, a) + d(su_n, su_n, a)] + 2\epsilon \sqrt{M}$$

$$(C) \quad (1-h)d(u_n, v, a) < (2+3h)\epsilon \sqrt{M}$$

$$d(u_n, u, a)$$

$$< hd(u, Su_n, a) + 2\epsilon/M$$

$$\leq h[d(S_n u_n, Su_n, a) + d(S_n u_n, Su_n, u)$$

$$+ d(u_n, u, a)] + 2\epsilon/M$$

अर्थात्

$$(D) \quad (1 - h) d(u_n, u, a) < (2+2h) \epsilon/M.$$

इस प्रकार (A)-(D) प्रत्येक स्थिति में, X के प्रत्येक a के लिए तथा समस्त $n \geq N$ के लिए

$$d(u_n, u, a) < \epsilon$$

इस प्रकार $u_n \rightarrow u$ सिद्ध होता है.

उपप्रमेय 1. मान लें 2-दूरीक समष्टि X पर $P_n, Q_n, S_n,$ और T_n स्व-प्रतिचित्रण हैं और $u_n (n=1, 2, \dots)$ उनका उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु है. मान लें अनुक्रम $\{P_n\}, \{Q_n\}, \{S_n\}$ और $\{T_n\}$ X में क्रमशः स्व-प्रतिचित्रणों P, Q, S और T पर एक समान रूप से अभिसरित होते हैं. यदि u प्रतिचित्रणों P, Q, S और T का उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु हो तथा

$$(1a) \quad d(Px, Qy, a)$$

$$\leq h \text{ अधिकतम } \{d(Sx, Ty, a), d(Px, Sx, a),$$

$$d(Qy, Ty, a), \frac{1}{2}[d(Px, Ty, a) + d(Qy, Sx, a)]\}.$$

X के समस्त x, y, a के लिए, जबकि $h \in (0, 1)$ संतुष्ट हो, तब $u_n \rightarrow u$.

उपपत्ति. क्योंकि प्रतिचित्रण P, Q, S, T जो (1a) को संतुष्ट करते हैं वे (1) को भी संतुष्ट करते हैं अतः प्रमेय 1 से उपपत्ति पूर्ण हुई.

प्रमेय 2. मान लें (X, d) पर P_n, Q_n, S_n व $T_n (n=1, 2, \dots)$ ऐसे स्व-प्रतिचित्रण हैं कि उनके उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु $u_n (n=1, 2, \dots)$ का अस्तित्व है तथा d संतत है. मान लें X पर स्व-प्रतिचित्रण P, Q, S और T अनुक्रमों $\{P_n\}, \{Q_n\}, \{S_n\}$ व $\{T_n\}$ की क्रमशः बिंदुशः सीमा हैं. यदि u प्रतिचित्रणों P, Q, S और T का उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु हो, तथा

$$(2) \quad d(P_n x, Q_n y, a)$$

$$\leq h \text{ अधिकतम } \{d(S_n x, T_n y, a), d(P_n x, S_n x, a), d(Q_n y, T_n y, a),$$

$$d(P_n x, T_n y, a), d(Q_n y, S_n x, a)\}$$

X के समस्त x, y, a के लिए जबकि $h \in (0, 1)$ संतुष्ट हो, तब $u_n \rightarrow u$.

$d(x, y, a)$

(1a)

$\leq d(x, y, a) \leq d(x, y, a) + d(x, y, a)$

$d(x, y, a) \leq d(x, y, a) + d(x, y, a)$

$x, y, a \in X, d(x, y, a) \leq d(x, y, a) + d(x, y, a)$

उपलब्ध है। (1a) में $d(x, y, a) \leq d(x, y, a) + d(x, y, a)$

कहा है कि (1) को भी ध्यान देना है और साथ ही उपलब्ध है।

ध्यान दें, $d(x, y, a) \leq d(x, y, a) + d(x, y, a)$

यदि $d(x, y, a) \leq d(x, y, a) + d(x, y, a)$ तो उपलब्ध है।

यदि $d(x, y, a) \leq d(x, y, a) + d(x, y, a)$ तो उपलब्ध है।

यदि $d(x, y, a) \leq d(x, y, a) + d(x, y, a)$ तो उपलब्ध है।

यदि $d(x, y, a) \leq d(x, y, a) + d(x, y, a)$ तो उपलब्ध है।

$d(x, y, a)$

(2)

$d(x, y, a) \leq d(x, y, a) + d(x, y, a)$

$d(x, y, a) \leq d(x, y, a) + d(x, y, a)$

$x, y, a \in X, d(x, y, a) \leq d(x, y, a) + d(x, y, a)$

$d(x, y, a)$

उपपत्ति. सिंह-राम [131, प्रमेय 2] व [133, प्रमेय 2]
की उपपत्ति का अनुसरण करके उपपत्ति पूर्ण हो सकती है.

उपप्रमेय 2. प्रमेय 2 प्रतिचित्रण शर्त (2) को (2a) से प्रतिस्थापित करने
पर भी सत्य रहती है.

$$(2a) \quad d(P_n x, Q_n y, a)$$

$$\leq h \text{ अधिकतम } \{d(S_n x, T_n y, a), d(P_n x, S_n x, a),$$

$$d(Q_n y, T_n y, a),$$

$$\frac{1}{2}[d(P_n x, T_n y, a) + d(Q_n y, S_n x, a)]\}.$$

उपपत्ति. क्योंकि प्रतिचित्रण P, Q, S, T जो (2 a) को संतुष्ट
करते हैं वे (2) को भी संतुष्ट करते हैं. अतः प्रमेय 2 से उपपत्ति पूर्ण हुई.

उपनिषद्. भाग-१ [131] भाग-२ [132] भाग-३ [133]

कि उपनिषद् का अनुवाद करने के लिये उपनिषद् का हि संस्कृत है

उपनिषद्. भाग-३ [131] भाग-२ [132] भाग-१ [133]

यह भी उपनिषद् है

(25) $g(p_n, x_n, y_n, a)$

$\times h(g(p_n, x_n, y_n, a), g(p_n, x_n, y_n, a))$

$g(q_n, y_n, T_n, a)$

$\# [g(p_n, x_n, y_n, a) + g(q_n, y_n, T_n, a)]$

उपनिषद्. भाग-३ [131] भाग-२ [132] भाग-१ [133]

यह भी उपनिषद् है (2) कि भी उपनिषद् है

3. टिप्पणियाँ

1. उपप्रमेय 1 में $S = T$ लेने पर सिंह-राम द्वारा स्थापित प्रमेय 1[131] प्राप्त हो जाता है.
2. उपप्रमेय 2 में $S=T$ लेने पर सिंह-राम द्वारा स्थापित प्रमेय 2[131] प्राप्त हो जाता है.
3. उपप्रमेय 1 में $P = Q$ लेने पर सिंह-राम द्वारा स्थापित प्रमेय 1[133] प्राप्त हो जाता है.
4. उपप्रमेय 2 में $P = Q$ लेने पर सिंह-राम द्वारा स्थापित प्रमेय 2 [133] प्राप्त हो जाता है.
5. 2-दूरीक समष्टि पर रोअड्स [95] व सिंह [115] द्वारा प्राप्त किये अभिसरण परिणाम प्रमेयों 1 -2 से उपप्रमेय के रूप में प्राप्त किये जा सकते हैं.
6. चूँकि प्रमेय 2 व उपप्रमेय 2 में d संतत है, अस्तु n को अनंत लेने पर शर्तों (2) व $(2a)$ से यह स्पष्ट हो जाता है कि P, Q, S व T भी (1) व $(1a)$ को संतुष्ट करते हैं. शर्तों (1) व $(1a)$ अधीन P, Q, S व T के उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु के अस्तित्व के संबंध में अध्याय 2 में अध्ययन किया गया है (अध्याय 2 उपप्रमेय 1 व 2 देखें).

संज्ञा

1. [111] संज्ञा का अर्थ है कि $T = 2$ है । संज्ञा का अर्थ है कि $T = 2$ है ।

2. [111] संज्ञा का अर्थ है कि $T = 2$ है । संज्ञा का अर्थ है कि $T = 2$ है ।

3. [111] संज्ञा का अर्थ है कि $T = 2$ है । संज्ञा का अर्थ है कि $T = 2$ है ।

4. [111] संज्ञा का अर्थ है कि $T = 2$ है । संज्ञा का अर्थ है कि $T = 2$ है ।

5. [111] संज्ञा का अर्थ है कि $T = 2$ है । संज्ञा का अर्थ है कि $T = 2$ है ।

6. [111] संज्ञा का अर्थ है कि $T = 2$ है । संज्ञा का अर्थ है कि $T = 2$ है ।

निर्देश

1. J.Achari, On the existence, uniqueness and approximation of fixed points as a generic property, Math. Rev. Anal. Number. Théor. Approximation, Math. 29 (52)(1987), no. 2, 95-98.
2. S.P.Acharya, Some results on fixed points in uniform spaces, Yokohama Math. J. 22(1974), 105-116.
3. S.P.Acharya, Convergence of a sequence of fixed points in a uniform space, Mat. Vesnik. 13 (28)(1976), 131-141.
4. I.K.Argyros, On some theorems of Mishra, Ćirić and Iséki, Mat. Vesnik. 39(1987), 377-380.
5. F.F.Bonsal, Lecture on some fixed point theorems of functional analysis, T.I.F.R., Bombay, 1962.
6. D.W.Boyd and J.S.Wong, On nonlinear contractions, Proc. Amer. Math. Soc. 20(1969), 458-464.
7. J.Caristi, Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions, Trans. Amer. Math. Soc., 215(1976), 241-251.
8. K.P.Chamola, Some contributions to fixed point theory in probabilistic metric spaces, D. Phil. Thesis, Srinagar, 1989.

1. J. Achatz, On the existence, uniqueness and approximation of fixed points in a generic property, Math. Rev. Anal. Numer. Theor. Approximation, Math. 29 (1987), no. 2, 95-98.

2. S.P. Acharya, Some results on fixed points in uniform spaces, Yokohama Math. J. 23 (1974), 105-116.

3. S.P. Acharya, Convergence of a sequence of fixed points in a uniform space, Mat. Vesnik 13 (1975), 131-141.

4. I.K. Argyros, On some theorems of Michael, Circ. and 1983, Mat. Vesnik 29 (1983), 345-350.

5. F.F. Bongal, Results on some fixed point theorems of functional analysis, J.I.E.S. Bombay, 1982.

6. D.W. Boyd and J.S. Wong, On nonlinear contractions, Proc. Amer. Math. Soc. 40 (1972), 258-264.

7. J. Caristi, Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions, Trans. Amer. Math. Soc. 215 (1976), 261-264.

8. K.P. Choudhury, Some theorems on fixed point theory in probabilistic metric spaces, J. Math. Sci. 10 (1977), 1-10.

9. Y.J.Cho, Linear mappings on linear 2-normed spaces, Ph.D. Thesis, Jingu (Korea), 1984.
10. Y.J.Cho, On existence of fixed points in 2-metric spaces, Pusan Kyŏ. Math. J. 1(1985), 81-88.
11. Y.J.Cho, M.S.Khan and S.L.Singh, Common fixed points of weakly commuting mappings, Review of Research, Faculty of Science, Mathematics Series 16(1988), no. 2, 62-63.
12. Y.J.Cho and S.L.Singh, A coincidence theorem and fixed point theorems in saks spaces, Kobe J. Math., 3(1986), 1-6.
13. L.B.Ćirić, Fixed point theorem for mappings with a generalized contractive iterate at a point, Publ. Inst. Math. Nouv. Série, Tome 13(2)(1972), 11-16.
14. L.B.Ćirić, On some maps with a nonunique fixed point, Publ. Inst. Mat. (Beograd) 17(1974), 52-58.
15. L.B.Ćirić, A generalization of Banach's contraction principle, Proc. Amer. Math. Soc. 45(1974), 267-273.
16. L.B.Ćirić, On fixed point of generalized contraction on probabilistic metric spaces, Publ. Inst. Math. (Beograd) 18(32)(1975), 71-78.

9. Y.J. Cho, Linear mappings on linear 2-normed spaces, Ph.D. Thesis, Korea (1984).

10. Y.J. Cho, On existence of fixed points in 2-metric spaces, Korean J. Math. 1 (1985) 81-88.

11. Y.J. Cho, M.S. Khan and S.L. Singh, Common fixed points of weakly commuting mappings, Review of Research, Faculty of Science, Mathematics Series 16(1988), no. 2, 65-67.

12. Y.J. Cho and S.L. Singh, A coincidence theorem and fixed point theorems in 2-metric spaces, Kobe J. Math. 3(1988), 1-6.

13. L.B. Ćirić, Fixed point theorem for mappings with a generalized contractive condition at a point, Publ. Inst. Math. Novi Sad, 13(2)(1983), 11-16.

14. L.B. Ćirić, On some maps with a generalized fixed point, Publ. Inst. Math. (Beograd) 15(1974), 53-58.

15. L.B. Ćirić, A generalization of Banach's contraction principle, Proc. Amer. Math. Soc. 45(1974), 267-273.

16. L.B. Ćirić, On fixed point of generalized contraction on probabilistic metric spaces, Publ. Inst. Math. (Beograd) 38(1975), 71-78.

17. V.Conserva, Common fixed point theorems for commuting maps on a metric space, Publ. Inst. Math. 32(46)(1982), 37-43.
18. K.M.Das and K.Naik, Common fixed point theorems for commuting maps on a metric space, Proc. Amer. Math. Soc. 77(1972), 369-373.
19. R.Decei \bar{c} and N. Sarapa , On common fixed point theorems for commuting mappings on menger spaces, Rad. Mat. 4(1988), 269-278.
20. B.C.Dhage, Some results for the maps with a nonunique fixed point, Indian J. Pure Appl. Math. 16(1985), 245-256.
21. R.C.Dimin \bar{n} ie S.Gähler and A.G.White, Jr., Strictly convex linear 2-normed space, Math. Nachr. 59(1974), 319-324.
22. R.C.Dimin \bar{n} ie and A.G.White, Jr., Non expansive mappings in linear 2-normed space, Math. Japon. 21(1976), 197-200.
23. M.Edelstein, On fixed and periodic points under contractive mappings, J. London Math. Soc. 37(1962), 74-79.
24. B.Fisher, Mapping with a common fixed point, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 7(1979), 81-84.

17. V. Gonner, Common fixed point theorems for commuting maps on a metric space, Publ. Inst. Math. 32(46) (1982), 37-43.

18. K.M. Das and K. Hail, Common fixed point theorems for commuting maps on a metric space, Proc. Amer. Math. Soc. 77(1978), 309-313.

19. B. Dede, On common fixed point theorems for commuting mappings on larger spaces, Rad. Mat. 4(1988), 209-218.

20. B.C. Dhage, Some results for the maps with a nonunique fixed point, Indian J. Pure Appl. Math. 16(1985), 245-250.

21. R.C. Dhimantle, S. Gahler and A.C. White, Jr., Strictly convex linear λ -normed space, Math. Nachr. 59(1974), 319-324.

22. R.C. Dhimantle and A.C. White, Jr., Non expansive mappings in linear λ -normed space, Math. Japon. 21(1976), 197-200.

23. M. Edelstein, On fixed and periodic points under contractive mappings, J. London Math. Soc. 37(1958), 74-79.

24. B. Fisher, Mapping with a common fixed point, Math. Sem. Notes Univ. Illinois, 81-84.

25. B.Fisher and S.Sessa, Two common fixed point theorems for weakly commuting mappings, *Period. Math. Hung.* 20(1989), 207-218.
26. S.Gähler, 2-metrische räume und ihre topologische struktur, *Math. Nachr.* 26(1963), 115-148.
27. S.Gähler, Linear 2-normierte. räume., *Math. Nachr.* 28(1964), 1-43.
28. S.Gähler, Über die uniformisierbarkeit 2-metrischer räume, *Math. Nachr.* 28(1965), 235-244.
29. S.Gähler, Zur geometric 2-metrischer räume, *Revue Roumaine De Mathem. Pures Et Appliques* 11 (1966), 665-667.
30. उमेश चन्द्र गैरोला, दूरीक एवं बानाख समष्टियों में संपात, स्थिर एवं संकर स्थिर बिंदुओं का अस्तित्व, पी-एच0 डी0 शोध प्रबंध, गुरुकुल कांगड़ी विश्वविद्यालय, हरिद्वार, अगस्त 1990.
31. A.Ganguly, On common fixed point of two mappings, *Indian J. Pure Appl. Math.* 11(1980), 173-176.
32. A.Ganguly, On an extension of Iséki's fixed point theorem, *Math. Sem. Notes Kobe Univ.* 10(1982), 675-676.

25. B. Fisher and S. Sene, Two common fixed point theorems for weakly commuting mappings, Period. Math. Hung. 20(1989), 207-218.

26. S. Ghosh, 2-metric spaces and their topological structure, Math. Nachr. 30(1963), 145-148.

27. S. Ghosh, Linear 2-normed spaces, Math. Nachr. 28(1962), 1-43.

28. S. Ghosh, Über die Uniformisierbarkeit 2-metrischer Räume, Math. Nachr. 28(1962), 235-244.

29. S. Ghosh, Sur géométrie 2-métrique, Revue Roumaine de Mathématique, 11 (1966), 665-667.

30. Ghosh, Sur les points fixes dans les espaces 2-métriques, Ann. Inst. Math. Jussieu, 1969.

31. A. Ganguly, On common fixed point of two mappings, Indian J. Pure Appl. Math. 11(1980), 113-114.

32. A. Ganguly, On an extension of Eshbach's point theorem, Math. Z. 200, 1970, 10(1982), 415-416.

33. A.Ganguly, Fixed point theorem on 2-Banach space, J. Indian Acad. Math. 4(1982), 80-81.
34. K.Goebel, A coincidence theorem, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys., 16(1968), 733-735.
35. L.F.Guseman, Jr., Fixed point theorems for mappings with a contractive iterate at a point, Proc. Amer. Math. Soc. 26(1970), 615-618.
36. O.Hadžić, Common fixed point theorems for family of mappings in complete metric spaces, Math. Japon. 29(1984), 127-134.
37. T.L.Hicks and B.E.Rhoades, A Banach type fixed point theorem, Math. Japon. 24(1979), 327-330.
38. C.Hsiao, A property of contractive type mappings in 2-metric spaces, Jhānābha. 16(1986), 223-239.
39. S.A.Husain and V.M.Sehgal, A common fixed point theorem for a family of mappings, Math. Japon. 26(1981), 287-290.
40. K.Iséki, Fixed point theorems in Banach spaces, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 2(1974), 11-18.

33. A. Garguly, Fixed point theorem on δ -Banach spaces, J. Indian Acad. Math. 4(1982), 89-91.

34. K. Gopal, A coincidence theorem, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. 16(1968), 733-735.

35. L.R. Gussman, Jr., Fixed point theorems for mappings with a contractive iterate at a point, Proc. Amer. Math. Soc. 26(1970), 615-618.

36. O. Hadžić, Common fixed point theorems for family of mappings in complete metric spaces, Math. Japon. 29(1984), 127-134.

37. T.L. Hicks and B.E. Rhoades, A Banach type fixed point theorem, Math. Japon. 24(1972), 327-330.

38. C. Hsiao, A property of contractive type mappings in δ -metric spaces, J. Math. 16(1986), 223-229.

39. S.A. Hussain and V.M. Sehgal, A common fixed point theorem for a family of mappings, Math. Japon. 25(1981), 287-290.

40. K. Isak, Fixed point theorems in Banach spaces, Math. Sem. Notes, Tokyo Univ. 9(1975), 11-18.

41. K.Iséki, On nonexpansive mappings in strictly convex linear 2-normed space, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 3(1975), 125-129.
42. K.Iséki, Fixed point theorem, in 2-metric spaces, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 3(1975), 133-136.
43. K.Iséki, Mathematics on 2-normed space, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 4(1976), 161-174.
44. K.Iséki, Some applications of Banach type contraction principles, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 4(1976), 211-214.
45. K.Iséki, Application of Zamfirescú's fixed point theorem, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 4(1976), 215-216.
46. K.Iséki, A generalization of Sehgal-Khazanchi's fixed point theorems, Nanta Math. 9(1976), 54-58.
47. K.Iséki, P.L.Sharma and B.K.Sharma, Contraction type mapping on 2-metric space, Math. Japon. 21(1977), 67-70.
48. V.I.Istrăţescu, Fixed point theory, D. Ridel Publ. Co. Holland, 1981.
49. G.Jungck, Commuting maps and fixed points, Amer. Math. Monthly 83(1976), 261-263.

41. K. Isakki, On nonexpansive mappings in strictly convex linear λ -normed spaces, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 3(1973), 122-129.
42. K. Isakki, Fixed point theorems in λ -metric spaces, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 3(1973), 123-126.
43. K. Isakki, Mathematics on λ -normed space, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 4(1974), 141-144.
44. K. Isakki, Some applications of Banach type contraction principles, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 4(1974), 211-214.
45. K. Isakki, Application of Kamran's fixed point theorem, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 4(1974), 215-216.
46. K. Isakki, A generalization of Sehgal-Khanna's fixed point theorem, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 4(1974), 24-28.
47. K. Isakki, P.L. Sharma and B.K. Sharma, Contraction type mapping on λ -metric space, Math. Japon. 21(1977), 67-70.
48. V.I. Istrăţescu, Fixed point theory, D. Reidel Publ. Co., Holland, 1981.
49. G. Jungck, Contracting maps and fixed points, Amer. Math. Monthly 81(1974), 261-263.

50. G.Jungck, Compatible mappings and common fixed points, Intern. J. Math. Math. Sci. 9(1986), 771-779.
51. G.Jungck, Compatible mappings and common fixed points (2), Internat. J. Math. Math. Sci. 11(1988), 285-288.
52. G.Jungck, Common fixed points for commuting and compatible maps on compacta, Proc. Amer. Math. Soc. 103(1988), 977-983.
53. R.Kanan, Some results on fixed points, Bull. Cal. Math. Soc. 60(1968), 71-76.
54. S.Kasahara, On some recent results on fixed points, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 6(1978), 373-382.
55. J.L.Kelley, General Topology, Van Nostrand, Princeton, M.J., 1955.
56. M.S.Khan, On the convergence of sequences of fixed points in 2-metric spaces, Indian J. Pure Appl. Math. 10(1979), 1062-1067.
57. M.S.Khan, M.Imdad and M.Swaleh, Asymptotically regular maps and sequences in 2-metric spaces, Indian J. Math. 27(1985), 81-88.
58. L.Khazanchi, Results on fixed points in complete metric spaces, Math. Japon. 19(1974), 283-289.

50. G. Jungck, Compatible mappings and common fixed points, Intern. J. Math. Math. Sci. 9(1986), 771-779.

51. G. Jungck, Compatible mappings and common fixed points (2), Internat. J. Math. Math. Sci. 11(1988), 285-288.

52. G. Jungck, Common fixed points for commuting and compatible maps on compacta, Proc. Amer. Math. Soc. 103(1988), 973-983.

53. R. Kannan, Some results on fixed points, Bull. Cal. Math. Soc. 60(1968), 71-76.

54. S. Katsaras, On some recent results on fixed points, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 1(1978), 373-382.

55. J. L. Kelley, General Topology, Van Nostrand, Princeton, N.J., 1955.

56. M. S. Khan, On the convergence of sequences of fixed points in 2 metric spaces, Indian J. Pure Appl. Math. 12(1979), 1065-1067.

57. M. S. Khan, M. Imdad and M. Swaleh, Common fixed points and sequences in 2 metric spaces, Indian J. Math. 27(1985), 81-88.

58. L. Khazanov, Results on fixed points in complete metric spaces, Math. Japon. 18(1975), 283-289.

59. S.S.Kim, Linear 2-normed spaces, Ph.D. Dissertation, Jinju (Korea), 1990.
60. T.Kubiak, Common fixed points of pairwise commuting mappings, Math. Nachr. 118(1984), 123-127.
61. S.N.Lal and M.Das, Mapping with common invariant points in 2-metric spaces, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 8(1980), 83-90.
62. S.N.Lal and A.K.Singh, An analogue of Banach's contraction principle for 2-metric space, Bull. Austral Math. Soc. 18(1978), 137-143.
63. J.Matkowski, Fixed point theorems for mappings with a contractive iterate at a point, Proc. Amer. Math. Soc. (1977), 344-348.
64. B.A.Meade and S.P.Singh, On common fixed point theorems, Bull. Austral. Math. Soc. 16(1977), 49-53.
65. A.Mic̑ko and B.Palczewski, Common fixed points of contractive type mappings in a 2-metric space, Math. Nachr. 124(1985), 341-355.
66. S.N.Mishra, On sequences of mappings and fixed points in uniform space, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino 34(1975-76), 405-410.

59. S.S. Kim, Linear mappings, *Publ. Math. Debrecen*, 1990.
60. J. Kubiak, Common fixed points of pairwise commuting mappings, *Math. Nachr.*, 116(1984), 129-132.
61. S.H. Lee and M. Oae, Mapping with common fixed points in 2-metric spaces, *Math. Sem. Korea Univ.*, 8(1985), 21-25.
62. S.H. Lee and A.M. Singh, An analogue of Banach's contraction principle for 2-metric spaces, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 18(1978), 137-143.
63. J. Markowski, Fixed point theorems for mappings with a contractive condition in a metric space, *Ann. Math. Soc.*, 119(7), 341-346.
64. B.A. Meade and S.H. Singh, On common fixed point theorems, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 16(1977), 49-53.
65. A. Michel and B. Piatecki, Common fixed points of contractive type mappings in a contractive space, *Math. Nachr.*, 124(1985), 341-355.
66. S.H. Mishra, On sequences of mappings and fixed points in metric spaces, *Math. Sem. Univ. Calicut*, 34(1975), 149-150.

67. S.N.Mishra, On fixed points of orbitally continuous maps, Nanta Math. 12(1979), 83-90.
68. S.B.Nadler, Jr, Sequences of contractions and fixed points, Pacific J. Math. 27(3) (1968), 579-585.
69. S.V.R.Naidu and J.R.Prasad, Common fixed points for four self-maps on a metric space, Indian J. Pure Appl. Math. 16(1985), 1089-1103.
70. S.V.R.Naidu and J.R.Prasad, Fixed point theorems in metric and 2-metric space, Indian J. Pure Appl. Math. 17(1986), 602-612.
71. S.V.R.Naidu and J.R.Prasad, Fixed point theorems in 2-metric spaces, Indian J. Pure Appl. Math. 17(1986), 974-993.
72. S.A.Naimpally, Contractive mappings in uniform spaces, Indag. Math. 27(1965), 477-481.
73. K.A.Narayan, P.S.Thapliyal and Virendra, Fixed point theorems in 2-metric spaces, Math. student 51(1983), 215-221.
74. J.L.Nelson and K.L.Singh, Remarks on selected fixed point theorems, Math. Japon. 34(1989), 81-82.

67. S.W. Minerva, On fixed points of orbitally continuous maps, *Math. Math.* 13(1977), 83-90.

68. S.B. Nadler, Jr., Sequences of contractions and fixed points, *Pacific J. Math.* 27(3) (1968), 579-585.

69. S.V.R. Naidu and J.R. Prasad, Common fixed points for four self-maps on a metric space, *Indian J. Pure Appl. Math.* 16(1985), 1987-1993.

70. S.V.R. Naidu and J.R. Prasad, Fixed point theorems in metric and 2-metric spaces, *Indian J. Pure Appl. Math.* 17(1986), 601-612.

71. S.V.R. Naidu and J.R. Prasad, Fixed point theorems in 2-metric spaces, *Indian J. Pure Appl. Math.* 17(1986), 974-983.

72. S.A. Naimen, Contractive mappings in uniform spaces, *Indag. Math.* 17(1965), 477-481.

73. K.A. Narayan, P.S. Thapliyal and V. Varadaraj, Fixed point theorems in 2-metric spaces, *Math. Student* 51(1983), 215-231.

74. J.J. Nieto and E.L. Sine, Remarks on selected fixed point theorems, *Math. Japon.* 34(1989), 81-85.

75. T.Okada, Coincidence theorems on L-spaces, Math. Japon. 26(1981), 291-295.
76. B.G.Pachpatte, Fixed point theorems for mappings on a 2-metric space, Chung Yuan 8(1979), 7-12.
77. B.G.Pachpatte, Some common fixed point theorems for mappings in metric spaces, Chung Yuan J. 9(1980), 14-16.
78. C. Panja and A.P. Baisnab, Fixed point theorem for mappings in a uniform space with a contractive iterate, Indian J. Pure Appl. Math. 12(1981)440-447.
79. B.D.Pant, Fixed point theorems in probabilistic metric spaces, D.Phil. Thesis, Garhwal University, Srinagar, 1984.
80. R.P.Pant, Common fixed points of two pairs of commuting mappings, Indian J. Pure Appl. Math. 17(1986), 187-192.
81. S.Park, On general contractive type conditions, J. Korean Math. Soc. 17(1980), 131-140.
82. S.Park and B.E.Rhoades, Some 'general fixed point theorems, Acta. Sci. Math. 42(1980), 299-304.
83. H.K.Pathak, Some nonunique fixed point theorems for new class of mappings, Ranchi Univ. Math. J. 17(1986), 65-70.

76. T. Okada, Coincidence theorems on L-spaces, Math. Japan. 25(1981), 291-297.

77. B.G. Pachpatte, Fixed point theorems for mappings on a metric space, Chung Hua 8(1979), 1-12.

78. B.G. Pachpatte, Some common fixed point theorems for mappings in metric spaces, Chung Hua 9(1980), 14-15.

79. C. Pant and A.P. Bhatnagar, Fixed point theorems for mappings in a uniform space with a contractive iterative, Indian J. Pure Appl. Math. 13(1981), 447.

80. B.D. Pant, Fixed point theorems in probabilistic metric spaces, D.Phil. thesis, Garhwal University, Dehradun, 1984.

81. R.P. Pant, Common fixed points of two pairs of commuting mappings, Indian J. Pure Appl. Math. 17(1986), 185-191.

82. S. Park, On general contractive type conditions, J. Korean Math. Soc. 17(1980), 121-124.

83. S. Park and B.E. Rhoades, Some general fixed point theorems, J. Math. Sci. 45(1985), 399-404.

84. H.K. Pathak, Some common fixed point theorems for new class of mappings, J. Math. Sci. 12(1978), 1-10.

84. H.K.Pathak, Some fixed point theorems for two mappings satisfying a new contractive type condition . Bull. Cal. Math. Soc. 80(1988), 73-78.
85. S.T.Patil and J.Achari, A note on fixed point theorem in 2-metric spaces, Math. Edu(Siwan) 22(1988) 1, 23-24.
86. B.Ram, Existence of fixed points in 2-metric spaces, D. Phil. Thesis, Garhwal Univ., Srinagar, 1982.
87. S.Ranganathan, Existence of fixed points in metric and Banach spaces, Ph.D. Thesis, B.H.U. Varanasi, 1978.
88. B.K.Ray and B.E.Rhoades, Fixed point theorems, Pac. J. Math. 71(1977), 517-520.
89. K.B.Reddy and P.V.Subrahmanyam, Extensions of Krasnoselskii's and Matkowski's fixed point theorems, Funk. Ekv. 24(1981), 67-83.
90. S.Reich, Kanan's fixed point theorem, Bull. Un. Mat. Ital. 4(1971), 1-11.
91. B.E.Rhoades, Fixed point theorems for a contractive type mapping , Notices Amer. Math. Soc. 24(1977), A-427.

84. H.K. Pathak, Some fixed point theorems for two mappings satisfying a new contractive type condition, Bull. Cal. Math. Soc. 80(1988), 73-78.

85. S.Y. Patel and J. Achari, A note on fixed point theorem in S -metric spaces, Math. Jde(Sivan) 55(1988), 23-24.

86. S. Ram, Existence of fixed points in S -metric spaces, D. Phil. Thesis, Garhwal Univ., Srinagar, 1982.

87. S. Ranganathan, Existence of fixed points in metric and Banach spaces, Ph.D. Thesis, B.H.U. Varanasi, 1978.

88. H.K. Ray and B.B. Rhoades, Fixed point theorems, Pac. J. Math. 71(1977), 515-520.

89. K.B. Reddy and P.V. Subrahmanyam, Extensions of Kannan's and Matkowski's fixed point theorems, Funk. Ekv. 24(1981), 67-69.

90. S. Reich, Kannan's fixed point theorem, Bull. Un. Mat. Jde. 4(1971), 1-11.

91. B.B. Rhoades, Fixed point theorems for a new contractive type mapping, Notices Amer. Math. Soc. 24(1977), 4-45.

92. B.E.Rhoades, A comparison of various definitions of contractive mappings, Trans. Amer. Math. Soc. 226(1977), 257-290.
93. B.E.Rhoades, Fixed point theorem for a contractive type mapping, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 7(1979), 13-19.
94. B.E.Rhoades, Fixed point theorems in a uniform space, Publ. Inst. Math. (Beograd) 25(39) (1979), 153-156.
95. B.E.Rhoades, Contraction type mappings on a 2-metric space, Math. Nachr. 91(1979), 151-156.
96. B.E.Rhoades, S.Sessa, M.S.Khan and M.Swaleh, On fixed point of asymptotically regular mappings, J. Austral. Math. Soc. 43(1987), 328-346.
97. K.P.R.Sastry and S.V.R.Naidu, Fixed point theorems for generalised contraction mappings, Yokohama Math. J. 28(1980), 15-29.
98. K.P.R.Sastry, S.V.R.Naidu, I.H.N.Rao and K.P.R.Rao, Common fixed point for asymptotically regular mappings, Indian J. Pure Appl. Math. 15(1984), 849-854.
99. K.P.R.Sastry, S.V.R.Naidu, I.H.N.Rao and K.P.R.Rao, Fixed point theorems for pairs of self maps, J. Math. Phys. Sci. 22(1988), 603-612.

92. B.E.Rhodes, A comparison of various definitions of contractive mappings, Trans. Amer. Math. Soc. 236(1977), 257-290.
93. B.E.Rhodes, Fixed point theorem for a contractive type mapping, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 7(1979), 13-19.
94. B.E.Rhodes, Fixed point theorems in a uniform space, Publ. Inst. Math. (Beograd) 24(74) (1979), 153-156.
95. B.E.Rhodes, Contraction type mappings on a 2-metric space, Math. Nachr. 91(1979), 151-156.
96. B.E.Rhodes, S.Sessa, M.S.Khan and M.Swaleh, On fixed point of asymptotically regular mappings, J. Austral. Math. Soc. 43(1987), 328-346.
97. K.P.R.Sastry and S.V.R.Naidu, Fixed point theorems for generalised contraction mappings, Yokohama Math. J. 28(1980), 15-29.
98. K.P.R.Sastry, S.V.R.Naidu, J.H.N.Rao and K.P.R.Rao, Common fixed point for asymptotically regular mappings, Indian J. Pure Appl. Math. 15(1984), 893-924.
99. K.P.R.Sastry, S.V.R.Naidu, J.H.N.Rao and K.P.R.Rao, Fixed point theorems for pairs of self maps, J. Math.

100. V.M.Sehgal, A fixed point theorem for mappings with contractive iterate, Proc. Amer. Math. Soc. 23(1969), 631-634.
101. V.M.Sehgal, On fixed and periodic points for a class of mappings, J. London Math. Soc. 5(1972), 571-576.
102. S.Sessa, On a weak commutativity condition of mappings in fixed point considerations, Publ. Inst. Math. (Beograd) 32(46)(1982), 149-153.
103. S.Sessa and B.Fisher, Common fixed points of weakly commuting mappings, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 35(1987), 341-349.
104. S.Sessa, R.N.Mukherjee and T.Som, A common fixed point theorem for weakly commuting mappings, Math. Japon. 31(1986), 235-245.
105. S.Sessa, B.E.Rhoades and M.S.Khan, On common fixed points of compatible mappings in metric and Banach spaces, Internat. J. Math. Math. Sci. 11(1988), 375-392.
106. A.K.Sharma, On fixed points in 2-metric spaces, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 6(1978), 467-473.
107. A.K.Sharma, A generalization of Banach contraction principle to 2-metric spaces, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 7(1979), 291-295.

100. V.M. Sehgal, A fixed point theorem for mappings with contractive iterates, *Proc. Amer. Math. Soc.* 51(1967), 611-614.

101. V.M. Sehgal, On fixed and periodic points for a class of mappings, *J. London Math. Soc.* 5(1972), 571-576.

102. S. Sessa, On a weak commutativity condition of mappings in fixed point considerations, *Publ. Inst. Math. (Beograd)* 32(46)(1982), 149-153.

103. S. Sessa and B. Fisher, Common fixed points of weakly commuting mappings, *Bull. Polish Acad. Sci. Math.* 35(1987), 341-349.

104. S. Sessa, R.N. Mukherjee and T. Sahu, A common fixed point theorem for weakly commuting mappings, *Math. Japon.* 31(1986), 535-552.

105. S. Sessa, B.E. Rhoades and M.S. Khan, On common fixed points of compatible mappings in metric and Banach spaces, *Internat. J. Math. Math. Sci.* 11(1988), 325-332.

106. A.K. Sharma, On fixed points in 2-metric spaces, *Math. Sem. Waseda Univ.* 6(1976), 407-413.

107. A.K. Sharma, A generalization of Banach contraction principle to 2-metric spaces, *Math. Sem. Waseda Univ.* 10(1978), 241-246.

108. A.K.Sharma, A note on fixed points in 2-metric spaces, Indian J. Pure Appl. Math. 11(1980), 1580-1583.
109. B.K.Sharma and P.L.Sharma, Contraction type mapping on general 2-metric space, Tamkang J. Math. 7(1976), 219-222.
110. M.R.Singh, Results on continuous mappings and fixed points in a 2-metric space using two metrics, J. Indian Acad. Math. 11(1989), 39-44.
111. M.R.Singh and A.K.Chatterjee, Fixed point theorems in 2-Banach space, Proc. Math. Soc. B.H.U. 3(1987), 183-189.
112. S.L.Singh, On common fixed points of commuting mappings, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 5(1977), 131-134.
113. श्याम लाल सिंह, 2-दूरीक समष्टि में उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु प्रमेय एवं इसका अनुप्रयोग, विज्ञान शोध भारती 1(1978), 21-26.
114. S.L.Singh, A note on the convergence of a pair of sequences of mappings, Arch. Math. (Brno.) 15(1), (1979), 35-38.
115. S.L.Singh, Some contractive type principles on 2-metric spaces and applications, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 7(1979), 1-11.

108. A.K.Sharma. A note on fixed points in S -metric spaces. Indian J. Pure Appl. Math. 11(1980), 1589-1591.

109. A.K.Sharma and P.L.Sharma. Contraction type mapping on general S -metric space. J. Math. (1976), 219-222.

110. M.R.Singh. Results on continuous mappings and fixed points in a S -metric space using two metrics. J. Indian Acad. Math. 11(1984), 39-44.

111. M.R.Singh and A.K.Sharma. Fixed point theorems in S -Banach space. Proc. Math. Soc. B.H.U. 3(1987), 183-189.

112. S.L.Singh. On common fixed points of commuting mappings. Math. Sem. Notes Kobe Univ. 5(1975), 131-134.

113. Singh and Singh. A note on the convergence of a sequence of mappings. Arch. Math. (Brno) 15(1), (1979), 35-38.

114. S.L.Singh. Some contractive type principles on S -metric spaces and applications. Math. Sem. Notes Kobe Univ. 11(1977), 1-14.

116. S.L.Singh, Fixed point theorems for commuting mappings, Indian J. Math. 24(1982), 25-26.
117. श्याम लाल सिंह, क्रमविनिमयी प्रतिचित्रणों हेतु हाल के स्थिर बिंदु प्रमेयों पर एक टिप्पणी, विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका 26(1983), 259-261.
118. S.L.Singh, A common fixed point theorem in a 2-metric space, Proc. Nat. Acad. Sci. India, Sect. A 53(1983), 107-112.
119. S.L.Singh, Common fixed point theorems in uniform spaces, Math. Edu. (Siwan) 19(1985), 146-148.
120. S.L.Singh, Coincidence theorems, fixed point theorems and convergence of the sequences of coincidence values, Punjab Univ. J. Math. 19(1986), 83-97.
121. S.L.Singh and K.Iséki, Fixed point theorems in 2-metric spaces, Indian J. Phy. Natur. Sci. 3B(1983), 32-34.
122. S.L.Singh and S.Kasahara, On some recent results on common fixed points, Indian J. Pure Appl. Math. 13(1982), 757-761, (Corrigendum) 14(1983), 1075.
123. S.L.Singh and C.Kulshrestha, Convergence of sequences of mappings and their common fixed points, Math. Edu. (Siwan) 15(1981), A55-60.

116. S.L. Singh, Fixed point theorems for commuting mappings, Indian J. Math. 25(1983), 25-26.

117. Singh and Singh, Fixed point theorems for mappings, Indian J. Math. 25(1983), 25-26.

118. S.L. Singh, A common fixed point theorem in a 2-metric space, Proc. Math. Acad. Sci. India, Sect. A 53(1983), 107-112.

119. S.L. Singh, Common fixed point theorems in uniform spaces, Math. Edn. (Sriwan) 19(1985), 146-148.

120. S.L. Singh, Coincidence theorems, fixed point theorems and convergence of the sequences of coincidence values, Punjab Univ. J. Math. 19(1986), 83-91.

121. S.L. Singh and K. Isak, Fixed point theorems in 2-metric spaces, Indian J. Math. 25(1983), 32-34.

122. S.L. Singh and S. Kachar, On some recent results on common fixed points, Indian J. Pure Appl. Math. 17(1986), 727-731. (Corrigendum) 14(1983), 1075.

123. S.L. Singh and G. Kishore, Convergence of sequences of mappings and their common fixed points, Math. Edn. (Sriwan) 19(1985), 146-148.

124. S.L.Singh and C.Kulshrestha, Coincidence theorems in metric spaces, Indian J. Phy. Natur. Sci. 2B(1982), 19-22.
125. S.L.Singh and C.Kulshrestha, Coincidence theorems, Indian J. Phy. Natur. Sci. 3B(1983), 5-10.
126. S.L.Singh and S.N.Mishra, Common fixed points and convergence theorems in uniform spaces, Mat. Vesnik 5(18)(33)(1981), 403-410.
127. S.L.Singh and S.N.Mishra, Fixed point theorems in uniform spaces, Resultate der Mathematik 6(1983), 202-206.
128. S.L.Singh and K.A.Narayan, Coincidence theorems on 2-metric spaces, Nat. Acad. Sci. Letters 9(1986), 19-22.
129. S.L.Singh and C.W.Norris, Common fixed point theorems in 2-metric spaces, Indian J. Math. 25(1983), 165-170.
130. S.L.Singh and B.D.Pant, Common fixed point theorems in probabilistic metric spaces and extension to uniform spaces, Honam Math. J. 6(1984), 1-12.
131. S.L.Singh and B.Ram, A note on the convergence of sequences of mappings and their common fixed points in a 2-metric space, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 9(1981), 181-185.

124. S.L. Singh and C. Kulkarni, Coincidence theorems in metric spaces, Indian J. Phys. Natur. Sci. 26(1982), 19-22.
125. S.L. Singh and C. Kulkarni, Coincidence theorems, Indian J. Phys. Natur. Sci. 26(1982), 2-10.
126. S.L. Singh and S.H. Mishra, Common fixed points and convergence theorems in uniform spaces, Mat. Vesnik 2(18)(33)(1981), 403-410.
127. S.L. Singh and S.H. Mishra, Fixed point theorems in uniform spaces, Resonance der Mathematik 6(1983), 202-206.
128. S.L. Singh and K.A. Narayan, Coincidence theorems on S -metric spaces, Nat. Acad. Sci. Letters 9(1986), 19-22.
129. S.L. Singh and C.W. Morris, Common fixed point theorems in S -metric spaces, Indian J. Math. 25(1983), 165-170.
130. S.L. Singh and B.D. Pant, Common fixed point theorems in probabilistic metric spaces and extension to uniform spaces, Honam Math. J. 6(1984), 1-12.
131. S.L. Singh and B. Ram, A note on the convergence of sequences of mappings and their common fixed points in a S -metric space, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 9(1981), 181-182.

132. S.L.Singh and B.Ram, Common fixed point of commuting mappings in 2-metric spaces, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 10(1982), 197-208.
133. S.L.Singh and B.Ram, A note on the convergence of sequences of mappings and their common fixed points in a 2-metric space II, J. Univ. Kuwait(Science) 10(1983), 31-35.
134. S.L.Singh and S.P.Singh, A fixed point theorem, Indian J. Pure Appl. Math. 11(1980), 1584-86.
135. S.L.Singh, B.M.L.Tivari and V.K.Gupta, Common fixed points of commuting mappings in 2-metric spaces and an application, Math. Nachr. 95(1980), 293-297.
136. S.P.Singh, Lecture notes on fixed point theorems in metric and Banach spaces, Matscience, Madras, 1974.
137. S.L.Singh and Virendra, Coincidence theorems 2-metric spaces, Indian J. Phy. Natur. Sci. 2B(1982), 32-35.
138. S.L.Singh and Virendra, Fixed points for family of mappings, Pusan Kyō. Math. J. 3(1987), 47-53.
139. S.L.Singh and Virendra, Relative asymptotic regularity and fixed points, Indian J. Math. 31(1989), 99-104.

132. S.L. Singh and B.Ram, Common fixed point of commuting mappings in 2-metric spaces, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 10(1982), 197-208.

133. S.L. Singh and B.Ram, A note on the convergence of sequences of mappings and their common fixed points in a 2-metric space II, J. Univ. Kuwait(Science) 10(1983), 31-35.

134. S.L. Singh and S.P. Singh, A fixed point theorem, Indian J. Pure Appl. Math. 11(1980), 1584-86.

135. S.L. Singh, B.M.L. Tivari and V.K. Gupta, Common fixed points of commuting mappings in 2-metric spaces and an application, Math. Nachr. 95(1980), 293-297.

136. S.P. Singh, Lecture notes on fixed point theorems in metric and Banach spaces, Maitland, Madras, 1974.

137. S.L. Singh and Virendra, Coincidence theorems in 2-metric spaces, Indian J. Phys. Natur. Sci. 28(1982), 35-38.

138. S.L. Singh and Virendra, Fixed points for family of mappings, Pusan Kyd. Math. J. 1(1987), 47-51.

139. S.L. Singh and Virendra, Relative asymptotic regularity and fixed points, Indian J. Math. 31(1989), 1-10.

140. T.Som, Some fixed point theorems on metric and Banach spaces, Indian J. Pure Appl. Math. 16(1985), 575-585.
141. E.Tarafdar, An approach to fixed point theorems in uniform spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 191(1974), 209-225.
142. B.M.L.Tivari and S.L.Singh, A note on recent generalizations of Jungck contraction principle, J. UPGC. Acad. Soc. 3(1986), 13-18.
143. Virendra, Coincidence theorems and fixed point theorems on 2-metric spaces and applications, Nep. Math. Sci. Rep. 10(1985), 1-12.
144. Virendra, Coincidence theorems and fixed point theorems in 2-metric spaces, D.Phil. Thesis, Garhwal Univ., Srinagar, 1986.
145. A.G.White, Jr., 2-Banach spaces, Math. Nachr, 42(1969), 43-60.
146. C.S.Wong, Common fixed points of two mappings, Pacific J. Math. 48(1973), 299-372.

140. T.Som, Some fixed point theorems on metric
and Banach spaces, Indian J. Pure Appl. Math.
16(1985), 575-585.
141. E.Taraldsen, An approach to fixed point theo-
rems in uniform spaces, Trans. Amer. Math.
Soc. 191(1974), 209-222.
142. B.M.L.Tiwari and S.L.Singh, A note on recent
generalizations of Jung's contraction princi-
ple, J. UPGC. Acad. Soc. 3(1985), 13-18.
143. Virendra, Coincidence theorems and fixed
point theorems on 2-metric spaces and appli-
cations, Nep. Math. Soc. 10(1985),
1-12.
144. Virendra, Coincidence theorems and fixed
point theorems in 2-metric spaces, D.Phil.
Thesis, Garhwal Univ., Srinagar, 1985.
145. A.G.White, Jr, 2-Banach spaces, Math. Nachr.
42(1969), 43-60.
146. C.S.Wong, Common fixed points of two mappings,
Pacific J. Math. 48(1973), 295-313.

तकनीकी शब्द

TECHNICAL TERMS

अक्रमविनिमयी	Noncommutating
अचर	Constant
अतुच्छ प्रतिचित्रण	Nontrivial mapping
अद्वितीय	Unique
अद्वितीयता	Uniqueness
अधिकतम	Maximum
अधीन	Under
अनंत	Infinity
अन्तर्विष्ट	Contained in
अन्वेषण करना	Investigate
अनुक्रम	Sequence
अनुक्रम-सीमा	Limit of a sequence
अनुक्रमतः पूर्ण समष्टि	Sequentially complete space
अनुक्रमतः पूर्ण हाउसडोर्फ सम परिवेश समष्टि	Sequentially complete Hausdorff uniform sapce
अनुप्रयोग	Applications
अनुप्रयोज्य	Applicable
अनुभाग	Part
अनुसरण करना	Follow
अभिसरण	Convergence
अभिसरण प्रमेय	Convergence theorem
अभिसार करता है	Converges
अभिसारी	Convergent

TECHNICAL TERMS	तकनीकी शब्द
Noncommutating	अवरोधित
Constant	स्थिर
Nontrivial mapping	अप्रतुल्य नक्शा
Unique	अद्वितीय
Uniqueness	अद्वितीयता
Maximum	अधिकतम
Under	नीचे
Infinity	अनन्त
Contained in	अन्तर्गत
Investigate	अन्वेषण करना
Sequence	श्रृंखला
Limit of a sequence	अनुक्रम-सीमा
Sequentially complete space	अनुक्रमिक रूप से पूर्ण स्थान
Sequentially complete Hausdorff uniform space	अनुक्रमिक रूप से पूर्ण हाउसडॉर्फ समानता स्थान
Applications	अनुप्रयोग
Applicable	अनुप्रयोग्य
Part	भाग
Follow	अनुसरण करना
Convergence	अवरोध
Convergence theorem	अवरोधन प्रमेय
Converges	अवरोध करता है
Convergent	अवरोधित

अरिक्त	Nonempty
अवयव	Element
अवधारणा	Concept
अविस्तारी	Nonexpansive
अस्तित्व	Existence
असत्य	False
असमिका	Inequality
अट्टासमान	Nondecreasing
आलोक	View
इस कारण से	Implies
इस प्रकार	Such that
इसी प्रकार	Similarly
उच्चक	Supremum
उत्तरोत्तर क्रम से	Successively
उन्नत	Improved
उन्नत करना	Improve
उन्नत स्थिति	Improved version
उपगामी क्रमविनिमयी	Asymptotically commuting
उपप्रमेय	Corollary
उपपत्ति	Proof
उपपत्ति का अनुसरण	Following proof technique
उपरि अर्ध-संतत	Upper semicontinuous
उपरि सामिसांतत्य	Upper semicontinuity
उपसमष्टि	Subspace
उपानुक्रम	Subsequence

Nonempty	अव्युत्थ
Element	अवयव
Concept	अभिप्रेत
Nonexpansive	अव्यवस्थित
Existence	अस्तित्व
False	असत्य
Inductively	अनुमानित
Nondecreasing	अव्यवस्थित
View	अभिप्रेत
Implies	अनुमानित
Such that	अनुमानित
Similarly	अनुमानित
Supremum	अव्यवस्थित
Successively	अनुमानित
Improved	अव्यवस्थित
Improve	अव्यवस्थित
Improved version	अव्यवस्थित
Asymptotically commuting	अव्यवस्थित
Corollary	अव्यवस्थित
Proof	अव्यवस्थित
Following proof technique	अव्यवस्थित
Upper semicontinuous	अव्यवस्थित
Upper semicontinuity	अव्यवस्थित
Subspace	अव्यवस्थित
Subsequence	अव्यवस्थित

उभयनिष्ठ	Common
ऋणैतर	Nonnegative
एकमानी प्रतिचित्रण	Single-valued map
एकमात्र	Unique
एक समान अभिसरण	Uniform convergence
एकीकृत	Unify
क्योंकि	Since
कक्षक	Orbit
कक्षकतः पूर्ण	Orbitally complete
कक्षकतः संतत	Orbitally continuous
कुल	Family
कौशी अनुक्रम	Cauchy sequence
क्रमविनिमयी	Commuting
क्रमविनिमेयता	Commutativity
गणनाएँ	Calculations
चूँकि	Since
छद्मदूरीक	Pseudometric
तर्क	Argument
तुच्छ प्रतिचित्रण	Trivial mapping
तत्समक प्रतिचित्रण	Identity mapping
तथापि	However
द्विसंतत	Bicontinuous
दुर्बल क्रमविनिमयी	Weakly commuting
दूरीक	Metric
दूरीक तुल्यरूप	Metric analogue

Common	सामान्य
Nonnegative	अधः
Single-valued map	एकमूल्य मानचित्र
Unique	एकलक्षण
Uniform convergence	एकसमान अभिसरण
Unify	एकीकृत
Since	चूंकि
Orbit	कक्षा
Orbitally complete	कक्षा पूर्ण
Orbitally continuous	कक्षा सतत
Family	कुल
Cauchy sequence	कोशी अनुक्रम
Commuting	कम्यूटिंग
Commutativity	कम्यूटिविटी
Calculations	गणना
Since	चूंकि
Pseudometric	पसुडोमेट्रिक
Argument	अर्थ
Trivial mapping	प्रारंभिक मानचित्र
Identity mapping	एकता मानचित्र
However	हालांकि
Blotting	ब्लॉटिंग
Weakly commuting	कम्यूटिंग
Modulo	मॉड्युलो

दूरीक फलन	Metric
दूरीक समष्टि	Metric space
2-दूरीक समष्टि	2-metric space
दूरीक समष्टियों का गुणन	Product of metric spaces
देखें, उदाहरणार्थ.	See, for instance
धनात्मक पूर्णांक	Positive integer
निर्देश	Reference
निर्देशांकतः	Coordinatewise
निम्नक	Infimum
नियतांक	Constant
निरपेक्ष मान दूरीक	Absolute value metric
निष्कर्ष	Conclusions
निश्चयात्मक कथन	Assertion
न्यूनतम	Minimum
प्रत्येक	For each
परिघटना	Phenomenon
परिबद्ध	Bounded
परिभाषा	Definition
परिमित	Finite
परिवर्त	Variant
प्रक्रम	Scheme
प्रतिचित्रण	Map/Mapping/Transformation
प्रतिचित्रण अनुक्रम	Sequence of mappings
प्रतिचित्रण शर्त.	Mapping condition
प्रतिचित्रण युगल	Pair of mappings

Metric	मैट्रिक
Metric space	मैट्रिक स्पेस
2-metric space	2-मैट्रिक स्पेस
Product of metric spaces	मैट्रिक स्पेसों का गुण
See, for instance	देखें, उदाहरण
Positive integer	धनात्मक पूर्णांक
Reference	संदर्भ
Coordinatewise	निर्देशांक:
Infimum	निम्नतम
Constant	निश्चित
Absolute value metric	निश्चल मान मैट्रिक
Conclusions	निष्कर्ष
Assertion	निश्चयनात्मक कथन
Minimum	न्यूनतम
For each	प्रत्येक
Phenomenon	घटना
Bounded	परिबद्ध
Definition	परिभाषा
Finite	परिमित
Variant	परिवर्त
Schema	प्रारूप
Map/Mapping/Transformation	प्रतिचित्रण
Sequence of mappings	प्रतिचित्रण अनुक्रम
Mapping condition	प्रतिचित्रण शर्त
Pair of mappings	प्रतिचित्रण युग्म

प्रतिचित्रण समूह	Family of mappings
प्रतिपादित	Establish
प्रतिबंध को समाप्त किया	Relaxed the condition
प्रतिस्थापित करने पर	Substituting
पर्याप्त व्यापक	Sufficiently general
पर्याप्त प्रतिबंध	Sufficient condition
पर्याप्त बृहत् पूर्णांक	Sufficiently large integer
प्रमेय	Theorem
प्रमेयिका	Lemma
प्रेरित	Induced/Motivated
पारिभाषित	Defined
पुनरावृत्तिक	Iterates
पुनरावृत्ति योजना/प्रक्रम	Iteration scheme
पूर्ण उपसमष्टि	Complete subspace
पूर्ण दूरीक समष्टि	Complete metric space
पैरिटी	Parity
प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय	Set of natural numbers
प्रायिकतात्मक	Probabilistic
प्रारंभिकी	Preliminaries
फलन	Function
फलस्वरूप	Consequently
बहुमानी	Multivalued
बानाख संकुचन सिद्धान्त (बासर्सि)	Banach Contraction
बानाख समष्टि	Principle Banach space

Family of mappings	परिवारिक चित्रण
Establish	स्थापित
Relaxed the condition	शिथिल की शर्त है
Substituting	प्रतिस्थापित करने पर
Sufficiently general	पर्याप्त सामान्य
Sufficient condition	पर्याप्त शर्त
Sufficiently large integer	पर्याप्त रूप से बड़ा पूर्णांक
Theorem	प्रमेय
Lemma	प्रमेयिका
Induced/Motivated	प्रेरित
Defined	परिभाषित
Iterates	पुनरावृत्तियाँ
Iteration scheme	पुनरावृत्ति योजना/प्रक्रम
Complete subspace	पूर्ण उपसमष्टि
Complete metric space	पूर्ण दूरी की शर्त
Parity	पैरिटी
Set of natural numbers	संयुक्त संख्याओं का समुच्चय
Probabilistic	सांख्यिक
Preliminaries	प्रारंभिक
Function	फलन
Consequently	प्रत्यक्ष
Multivalued	बहुमूल्य
Contraction	संकुचन (प्रमेय)
Banach	बानाख
Principle	प्रमेय
Banach space	बानाख समष्टि

बिंदुशः	Pointwise
मनमाना	Arbitrary
मानकित समष्टि	Normed space
मान लें	Assume that
मिन्कोव्स्की छद्मदूरीक	Minkowski's pseudometric
यदि और केवल यदि	If and only if
यह स्पष्ट करता है	This implies
युंक्सी (युंक् संकुचन सिद्धांत)	Jungck Contraction Principle
यूक्लिडीयन दूरीक	Euclidean metric
रचना करना	Construct
लिपशिट्ज नियतांक	Lipschitz constant
वस्तुतः	Essentially
व्यपकता	Generality
व्यापक रूप में	In general
विकर्ण	Diagonal
वास्तविक मान फलन	Real valued function
वास्तविक संख्या	Real number
विन्यास	Setting
विरोध/विरोधाभास	Contradiction
विमाओं	Dimensions
विलोम	Converse
विशिष्ट दशाएं	Special cases
विस्तारण/विस्तारित	Extension / Extend
शेषांश	Remaining Part

Pointwise	बिंदुगत
Arbitrary	अपेक्षित
Normed space	सामान्यीकृत स्थान
Assume that	मान लें
Minkowski's pseudometric	मिन्कोव्स्की अर्ध-मिति
It and only if	और केवल तब
This implies	इसका अर्थ है
Contraction	संकुचन (संकुचन सिद्धांत)
Principle	
Euclidean metric	यूक्लिडियन दूरी
Construct	बनाना
Lipschitz constant	लिप्शिज स्थिरांक
Essentially	मूलतः
Generally	सामान्यतः
Ingeneral	सामान्यतः नहीं
Diagonal	निर्णय
Real valued function	वास्तविक मान फलन
Real number	वास्तविक संख्या
Setting	निर्देश
Contradiction	विरोधाभास
Dimensions	विमीयता
Converse	प्रतिपक्ष
Special cases	विशेष मामले
Extension / Extend	विस्तार/विस्तार

शून्य हो जाता है	Vanishes
सदृश विधि	Analogous manner
समतुल्य	Equivalent
सम परिवेश समष्टि	Uniform space
समस्त	For all
सममिति	Symmetry
समता	Parity
समुच्चय गुणन	Product of sets
सर्वनिष्ठ समुच्चय	Intersection set
सर्वनिष्ठ गुणधर्म	Common characteristic
सर्वेक्षण	Survey
सामान्य परिवेष्टक	Usual uniformity
सीमा	Limit
सीमांत मान	Limiting value
सीमा प्रतिचित्रण	Limit-mapping
सुधार	Improves
सुसंगत	Compatible
सुसंगत प्रतिचित्रण	Compatible mapping
सुस्पष्ट	Evident
सूचीकरण समुच्चय	Indexing set
संकल्पना	Concept
संकुचन सिद्धांत/शर्त.	Contraction principle /condition
संकुचनीय पुनरावृत्तिक	Contractive iterates
संकुचित प्रकार का प्रतिचित्रण	Contractive type mapping

Contrastive type mapping	वैकल्पिक प्रकार का मappings
Contrastive features	वैकल्पिक विशेषताएँ
Condition	शर्त
Contraction principle	संक्षेपण सिद्धांत
Concept	संकल्प
Indexing set	सूचक समुच्चय
Evident	स्पष्ट
Compatible mapping	संगत मappings
Compatible	संगत
Improves	सुधारा
Limit-mapping	सीमा मappings
Limiting value	सीमा मान
Limit	सीमा
Usual uniformity	सामान्य समरूपता
Survey	अन्वेषण
Common characteristic	सामान्य विशेषता
Intersection set	अवकाश समुच्चय
Product of sets	समूहों का गुणनफल
Early	प्रारंभिक
Symmetry	समरूपता
For all	सभी के लिए
Uniform space	समरूप स्थान
Equivalent	समतुल्य
Analogous manner	समानांतर तरीका
Variances	परिवर्तन

संकेतन	Notation
संगत	Corresponding
संतत/संततता	Continuous/Continuity
संतुष्ट करना	Satisfy
संपात/संपाती	Coincidence/Coincident
संबंध	Relation
सांतत्य शर्त	Continuity condition
सांस्थितिकी	Topology
सांस्थितिक प्रारंभिकी	Topological preliminaries
सांस्थितिक समष्टि	Topological space
स्थापित करना	Establish
स्थिर बिंदु	Fixed point
स्थिर बिंदु अनुक्रम	Fixed-point sequence
स्थिर बिंदु प्रमेय / सिद्धांत	Fixed point theorem/Theory
स्व-प्रतिचित्रण	Self-mapping
हाउसडोर्फ दूरीक	Hausdorff metric
हाउसडोर्फ समपरिवेश समष्टि	Hausdorff uniform space
त्रिक	Triplet
त्रिभुज का क्षेत्रफल	Area of a triangle

Notation	नोटेशन
Corresponding	उत्तर
Continuous/Continuity	सतत/सतता
Existence	अस्तित्व
Coincidence/Coincident	सम-स्थिति
Relation	संबंध
Continuity condition	सतता की शर्त
Topology	उपस्थिति
Topological preliminaries	उपस्थिति के प्रारंभिक
Topological space	उपस्थिति का स्थान
Establish	स्थापित करना
Fixed point	स्थिर बिंदु
Fixed-point sequence	स्थिर बिंदु अनुक्रम
Fixed point theory/theory	स्थिर बिंदु सिद्धांत / सिद्धांत
Self-mapping	स्व-चित्रण
Hausdorff metric	हाउसडॉर्फ दूरी
Hausdorff uniform space	हाउसडॉर्फ समरूप स्थान
Triplet	तुल्य
Area of a triangle	त्रिभुज का क्षेत्रफल

प्र का श न

1. उपगामी क्रमविनिमयी प्रतिचित्रणों हेतु 2-दूरीक समष्टि में एक स्थिर बिंदु प्रमेय (प्रो० श्याम लाल सिंह के साथ संयुक्त) विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका 30(3)(1987), 170-174.
2. उपगामी क्रमविनिमयी प्रतिचित्रणों हेतु 2-दूरीक समष्टि में एक स्थिर बिंदु प्रमेय-II (प्रो० श्याम लाल सिंह के साथ संयुक्त) विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका 30(4)(1987), 207-211.
3. 2-दूरीक समष्टि पर प्रतिचित्रण समूह के संपात तथा स्थिर बिंदु प्रमेय एवं अनुप्रयोग (प्रो० श्याम लाल सिंह और श्री अशोक गांगुली के साथ संयुक्त) विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका 32(3)(1989), 17-38.
4. प्रतिचित्रणों के अनुक्रम का अभिसरण एवं सम परिवेश समष्टियों में स्थिर बिंदु (प्रो० श्याम लाल सिंह और श्री वीरेन्द्र के साथ संयुक्त) विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका को प्रकाशनार्थ प्रेषित.

Donated by
Family of Late P. Singh
Ex. Principal, College of Science
C.K.V., Haridwar

COINCIDENCE AND FIXED POINT THEOREMS IN METRIC AND 2-METRIC SPACES

A THESIS

submitted to the

HEMVATI NANDAN BAHUGUNA GARHWAL UNIVERSITY

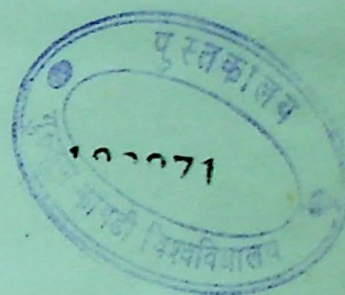
SRINAGAR (GARHWAL)

for the award of the degree of

DOCTOR OF PHILOSOPHY

in

MATHEMATICS



By

VIJAYENDRA KUMAR

Pt. Lalit Mohan Sharma Government Postgraduate College

RISHIKESH 249 201

Under the Supervision of

PROFESSOR S. L. SINGH

Enrolment No. GR-88006

OCTOBER 1990

COINCIDENCE AND FIXED POINT THEOREMS IN METRIC AND 2-METRIC SPACES

A THESIS

submitted to the

HENRY VIctor KANDAN BAHUGUNA GARHWAL UNIVERSITY

(GARHWAL)

for the award of the degree of

DOCTOR OF PHILOSOPHY

in

MATHEMATICS

BY

VIJAYENDRA KUMAR

Pt. Lalit Mohan Sharma Government Postgraduate College

RISHIKESH 249 201

Under the supervision of

PROFESSOR E. L. SINGH

OCTOBER 1990

Enrolment No. GR-88005

COINCIDENCE AND FIXED POINT THEOREMS IN METRIC AND L -METRIC SPACES

A THESIS

Submitted to the

HONORARY BOARD OF STUDIES, CATWAL, CHANDIGARH

IN PARTIAL FULFILLMENT

OF THE REQUIREMENTS FOR THE

DEGREE OF MASTER OF PHILOSOPHY

BY

DR. J. S. CHHABRA

ASSISTANT PROFESSOR, P. G. DEPARTMENT

OF MATHEMATICS

UNIVERSITY OF CHANDIGARH

CHANDIGARH, PUNJAB, INDIA

1974

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

UNIVERSITY OF CHANDIGARH

CHANDIGARH, INDIA

THE HINDU RELIGION
BY H. H. WILSON

PREFACE

BY THE AUTHOR

LONDON: LONGMANS, GREEN, AND CO. 1877

NEW YORK: LONGMANS, GREEN, AND CO. 1877

AMSTERDAM: H. N. SIMMONS 1877

BOMBAY: LONGMANS, GREEN, AND CO. 1877

PRINTED BY

LONGMANS, GREEN, AND CO.

PRINTERS, 15, BEDFORD SQUARE, LONDON, W.C.

ALL RIGHTS RESERVED

THE HINDU RELIGION

BY H. H. WILSON

COINCIDENCE AND FIXED POINT THEOREMS IN METRIC AND \mathcal{M} -METRIC SPACES

A THESIS

BY

DR. H. K. SINGH

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

UNIVERSITY OF DELHI

NEW DELHI

1970

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

UNIVERSITY OF DELHI

NEW DELHI

UNDER THE SUPERVISION OF

PROFESSOR D. L. SINGH

SUPPL. - GRI LIBRARY

Signature _____ Date _____

Received by

and ERL by

Worked

COINCIDENCE AND FIXED POINT THEOREMS IN METRIC AND 2-METRIC SPACES

A THESIS

submitted to the

**HEMVATI NANDAN BAHUGUNA GARHWAL UNIVERSITY
SRINAGAR (GARHWAL)**

for the award of the degree of

DOCTOR OF PHILOSOPHY

in

MATHEMATICS

By

VIJAYENDRA KUMAR

**Pt. Lalit Mohan Sharma Government Postgraduate College
RISHIKESH 249 201**

Under the Supervision of

PROFESSOR S. L. SINGH

Enrolment No. GR-88006

OCTOBER 1990